Тема: Теория функций комплексной переменной

Задание. *Разложить функцию $f(z)$ по степеням $(z-z_0)$ в ряд Тейлора или Лорана во всех областях на плоскости, где такое разложение возможно.*

$$f(z)=\frac{z^2+3}{z^2+2z},\ z_0=1.$$

Решение:

Функция может быть представлена в виде.

$$f(z)=\frac{z^2+3}{z^2+2z}=\frac{z^2+2z-2z+3}{z^2+2z}=1+\frac{-2z+3}{z^2+2z}=1+\frac{-2z+3}{z(z+2)}.$$

Введем дополнительную перемененную $t=z-z_0=z-1,\ z=t+1$:

$$f(z)=1+\frac{-2(t+1)+3}{(t+1)(t+1+2)}=1+\frac{-2t+1}{(t+1)(t+3)}=f(t).$$

Полученную функцию будем раскладывать уже по степеням t.

Функция имеет особые точки $t=-1,\ t=-3$.

Функция будет аналитической в областях:

а) внутренность круга $|t|<1$,

б) кольцо $1<|t|<3$,

в) внешность круга $|t|>3$.

Представим функцию в виде суммы элементарных дробей:

$$f(t)=1+\frac{-2t+1}{(t+1)(t+3)}=1+\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+3}=1+\frac{A(t+3)+B(t+1)}{(t+1)(t+3)},$$

$$-2t+1=A(t+3)+B(t+1),$$

$$\begin{cases}A+B=-2,\\3A+B=1.\end{cases}$$

$$\begin{cases}B=-7/2,\\A=3/2.\end{cases}$$

Получили $f(t)=1+\dfrac{-2t+1}{(t+1)(t+3)}=1+\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{t+1}-\dfrac{7}{2}\dfrac{1}{t+3}$.

Найдем разложение функции в области а):

$$f(t)=1+\frac{-2t+1}{(t+1)(t+3)}=1+\frac{3}{2}\frac{1}{t+1}-\frac{7}{2}\frac{1}{t+3}=1+\frac{3}{2}\frac{1}{1+t}-\frac{7}{6}\frac{1}{1+(t/3)}=$$

Для каждой из дробей в последнем выражении воспользуемся известным разложением

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-...+(-1)^n z^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\ |z|<1; \qquad (*)$$

Получаем:

$$f(t)=1+\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n-\frac{7}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{3^n}=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{6\cdot 3^n}\right).$$

Найдем разложение функции в области б) $1<|t|<3$.

Ряд для второй из рассмотренных выше дробей сходится при $1<|t|<3$, а ряд для первой дроби расходится для $1<|t|<3$, поэтому первую дробь необходимо преобразовать.

$$f(t)=1+\frac{3}{2}\frac{1}{t+1}-\frac{7}{2}\frac{1}{t+3}=1+\frac{3}{2}\frac{1}{t}\frac{1}{1+(1/t)}-\frac{7}{6}\frac{1}{1+(t/3)}=1+\frac{3}{2}\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{t^n}-\frac{7}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{3^n}=$$

$$=1+\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{t^{n+1}}-\frac{7}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{3^n}.$$

Найдем разложение функции в области в) $|t|>3$:

$$f(t)=1+\frac{3}{2}\frac{1}{t+1}-\frac{7}{2}\frac{1}{t+3}=1+\frac{3}{2}\frac{1}{t}\frac{1}{1+(1/t)}-\frac{7}{2}\frac{1}{t}\frac{1}{1+(3/t)}=1+\frac{3}{2}\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{t^n}-\frac{7}{2}\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{t^n}=$$

$$=1+\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{t^{n+1}}-\frac{7}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{t^{n+1}}=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{t^{n+1}}\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{2}3^n\right).$$

Вернемся к исходной переменной z.

а) внутренность круга $|z-1|<1$,

$$f(z)=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{6\cdot 3^n}\right).$$

б) кольцо $1<|z-1|<3$,

$$f(z)=1+\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+1}}-\frac{7}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{3^n}.$$

в) внешность круга $|z-1|>3$.

$$f(z)=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+1}}\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{2}3^n\right).$$