

Тема: Теория функций комплексной переменной

ЗАДАНИЕ. Найти вычеты функции относительно её полюсов: $f(z) = \frac{1}{z^2 + 4}$.

РЕШЕНИЕ:

Функция имеет особые точки

$$z^2 + 4 = 0,$$

$$z^2 = -4,$$

$$z = \pm 2i.$$

Это простые полюсы, поэтому вычеты в них могут быть вычислены по следующей формуле:

$$\operatorname{res}_{z=2i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{(z - 2i)}{z^2 + 4} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{z + 2i} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4},$$

$$\operatorname{res}_{z=-2i} f(z) = \lim_{z \rightarrow -2i} (z + 2i) f(z) = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{(z + 2i)}{z^2 + 4} = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{1}{z - 2i} = \frac{1}{-4i} = \frac{i}{4}.$$