Тема: Теория функций комплексной переменной

Задание. *Вычислить интеграл по замкнутому контуру с помощью вычетов*

$$\int_C \frac{4}{(z^2+4)^2}dz,\ C\{z:|z-i|=2\},$$

Решение:

$$z-i=x+iy-i=x+(y-1)i.$$

$$|z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2$$

Таким образом $C: x^2+(y-1)^2=4$ - окружность с центром в точке $T[0;1]$ и радиусом $R=2$.

$$f(z)=\frac{4}{\left(z^2+4\right)^2}=\frac{4}{\left(z+2i\right)^2\left(z-2i\right)^2}.$$

Точка $z=-2i$ находится вне контура, а точка $z=2i$ - внутри контура. Значит

$$\operatorname{res} f(2i)=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left\{\frac{\left(z-2i\right)^2 4}{\left(z+2i\right)^2\left(z-2i\right)^2}\right\}=\lim_{z\to 2i}-\frac{8}{\left(z+2i\right)^3}=-\frac{8}{\left(4i\right)^3}=\frac{1}{8i}=-\frac{1}{8}i.$$

Согласно основной теореме вычетах, получим:

$$\int_C \frac{4}{(z^2+4)^2}dz=-2\pi i\frac{1}{8}i=\frac{\pi}{4}.$$