

Задачи на векторы и их произведения

Пример решения задачи по алгебре

Задача. Даны векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . Необходимо:

- вычислить смешанное произведение трех векторов;
- найти модуль векторного произведения;
- проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора;
- проверить, будут ли компланарны три вектора.

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{j} + 4\vec{k}, \quad \vec{c} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

- $\vec{a} \cdot 3\vec{b} \cdot \vec{c}$;
- $|3\vec{a} \times 2\vec{c}|$;
- \vec{a} и \vec{c} ;
- \vec{a} , $2\vec{b}$ и $3\vec{c}$

Решение.

а) Вычислим смешанное произведение трех векторов $\vec{a} \cdot 3\vec{b} \cdot \vec{c}$. Для этого сначала вычислим смешанное произведение:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-3-8) + 5(-12-1) = -22 - 65 = -87$$

$$\text{Тогда } \vec{a} \cdot 3\vec{b} \cdot \vec{c} = 3(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = 3(-87) = -261.$$

б) Найдем модуль векторного произведения $|3\vec{a} \times 2\vec{c}|$.

Сначала вычислим векторное произведение:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{c} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(9-2) - \vec{j}(-6-5) + \vec{k}(4+15) = \\ &= 7\vec{i} + 11\vec{j} + 19\vec{k} = \{7, 11, 19\}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } |3\vec{a} \times 2\vec{c}| = 6|\vec{a} \times \vec{c}| = 6\sqrt{7^2 + 11^2 + 19^2} = 18\sqrt{59} \approx 138,26.$$

с) Проверим, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора: \vec{a} и \vec{c} .

Найдем скалярное произведение:

$$(\vec{a}, \vec{c}) = \{2, -3, 1\} \cdot \{5, 2, -3\} = 10 - 6 - 3 = 1 \neq 0. \text{ Векторы не ортогональны.}$$

Найдем соотношение координат:

Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru

Еще примеры: https://www.matburo.ru/ex_ag.php?p1=agvect

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

$\frac{2}{5} \neq \frac{-3}{2} \neq \frac{1}{-3}$. Векторы не коллинеарны.

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{j} + 4\vec{k}, \quad \vec{c} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

d) Проверим, будут ли компланарны три вектора: \vec{a} , $2\vec{b}$ и $3\vec{c}$. Векторы компланарны, если их смешанное произведение равно нулю. Известно, что $\vec{a} \cdot (2\vec{b}) \cdot (3\vec{c}) = 6 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 6(-87) \neq 0$, поэтому векторы не компланарны.