Угол между векторами, параллелограмм на векторах

Пример решения задачи по алгебре

Задача. *Дано* $|\bar{a}|=4$, $|\bar{b}|=6$, $\angle\varphi=\pi/6$. *Найти:*

А) косинус угла между векторами $(\bar{a}-2\bar{b})$ *и* $(2\bar{a}-\bar{b})$.

Б) площадь параллелограмма, построенного на векторах $(2\bar{a}+\bar{b})$ *и* $(2\bar{a}-\bar{b})$.

Решение.

Найдем сначала скалярное произведение $(\bar{a}\cdot\bar{b})=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi=4\cdot6\cdot\cos\frac{\pi}{6}=12\sqrt{3}$.

Косинус угла между векторами $(\bar{a}-2\bar{b})$ и $(2\bar{a}-\bar{b})$ равен:

$$\cos\psi=\frac{(\bar{a}-2\bar{b})\cdot(2\bar{a}-\bar{b})}{|\bar{a}-2\bar{b}|\cdot|2\bar{a}-\bar{b}|}.$$

Вычисляем:

$$(\bar{a}-2\bar{b})\cdot(2\bar{a}-\bar{b})=2(\bar{a},\bar{a})-(\bar{a},\bar{b})-4(\bar{b},\bar{a})+2(\bar{b},\bar{b})=$$

$$=2|\bar{a}|^2-5(\bar{b},\bar{a})+2|\bar{b}|^2=2\cdot16-5\cdot12\sqrt{3}+2\cdot36=104-60\sqrt{3}.$$

$$|\bar{a}-2\bar{b}|^2=(\bar{a}-2\bar{b})\cdot(\bar{a}-2\bar{b})=(\bar{a},\bar{a})-4(\bar{b},\bar{a})+4(\bar{b},\bar{b})=$$

$$=|\bar{a}|^2-4(\bar{b},\bar{a})+4|\bar{b}|^2=16-4\cdot12\sqrt{3}+4\cdot36=160-48\sqrt{3}.$$

$$|2\bar{a}-\bar{b}|^2=(2\bar{a}-\bar{b})\cdot(2\bar{a}-\bar{b})=4(\bar{a},\bar{a})-4(\bar{b},\bar{a})+(\bar{b},\bar{b})=$$

$$=4|\bar{a}|^2-4(\bar{b},\bar{a})+|\bar{b}|^2=4\cdot16-4\cdot12\sqrt{3}+36=100-48\sqrt{3}.$$

Подставляем:

$$\cos\psi=\frac{(\bar{a}-2\bar{b})\cdot(2\bar{a}-\bar{b})}{|\bar{a}-2\bar{b}|\cdot|2\bar{a}-\bar{b}|}=\frac{104-60\sqrt{3}}{\sqrt{160-48\sqrt{3}}\sqrt{100-48\sqrt{3}}}=0,002.$$

Площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения. Найдем векторное произведение:

$$\bar{p}\times\bar{q}=(2\bar{a}+\bar{b})\times(2\bar{a}-\bar{b})=4(\bar{a}\times\bar{a})-2(\bar{a}\times\bar{b})+2(\bar{b}\times\bar{a})-(\bar{b}\times\bar{b})=$$

$$=4\cdot0-2(\bar{a}\times\bar{b})-2(\bar{a}\times\bar{b})-1\cdot0=-4(\bar{a}\times\bar{b}).$$

Тогда площадь параллелограмма

$$|\bar{p}\times\bar{q}|=|-4(\bar{a}\times\bar{b})|=4\cdot|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi=4\cdot4\cdot6\cdot\sin\pi/6=48.$$