

## Угол между векторами, параллелограмм на векторах

### Пример решения задачи по алгебре

**Задача.** Дано  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 6$ ,  $\angle \varphi = \pi / 6$ . Найдите:

А) косинус угла между векторами  $(\vec{a} - 2\vec{b})$  и  $(2\vec{a} - \vec{b})$ .

Б) площадь параллелограмма, построенного на векторах  $(2\vec{a} + \vec{b})$  и  $(2\vec{a} - \vec{b})$ .

**Решение.**

Найдем сначала скалярное произведение  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 4 \cdot 6 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 12\sqrt{3}$ .

Косинус угла между векторами  $(\vec{a} - 2\vec{b})$  и  $(2\vec{a} - \vec{b})$  равен:

$$\cos \psi = \frac{(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} - 2\vec{b}| \cdot |2\vec{a} - \vec{b}|}.$$

Вычисляем:

$$\begin{aligned} (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) &= 2(\vec{a}, \vec{a}) - (\vec{a}, \vec{b}) - 4(\vec{b}, \vec{a}) + 2(\vec{b}, \vec{b}) = \\ &= 2|\vec{a}|^2 - 5(\vec{b}, \vec{a}) + 2|\vec{b}|^2 = 2 \cdot 16 - 5 \cdot 12\sqrt{3} + 2 \cdot 36 = 104 - 60\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 &= (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a}) - 4(\vec{b}, \vec{a}) + 4(\vec{b}, \vec{b}) = \\ &= |\vec{a}|^2 - 4(\vec{b}, \vec{a}) + 4|\vec{b}|^2 = 16 - 4 \cdot 12\sqrt{3} + 4 \cdot 36 = 160 - 48\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |2\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 4(\vec{a}, \vec{a}) - 4(\vec{b}, \vec{a}) + (\vec{b}, \vec{b}) = \\ &= 4|\vec{a}|^2 - 4(\vec{b}, \vec{a}) + |\vec{b}|^2 = 4 \cdot 16 - 4 \cdot 12\sqrt{3} + 36 = 100 - 48\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Подставляем:

$$\cos \psi = \frac{(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} - 2\vec{b}| \cdot |2\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{104 - 60\sqrt{3}}{\sqrt{160 - 48\sqrt{3}} \sqrt{100 - 48\sqrt{3}}} = 0,002.$$

Площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения. Найдем векторное произведение:

$$\begin{aligned} \vec{p} \times \vec{q} &= (2\vec{a} + \vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b}) = 4(\vec{a} \times \vec{a}) - 2(\vec{a} \times \vec{b}) + 2(\vec{b} \times \vec{a}) - (\vec{b} \times \vec{b}) = \\ &= 4 \cdot 0 - 2(\vec{a} \times \vec{b}) - 2(\vec{a} \times \vec{b}) - 1 \cdot 0 = -4(\vec{a} \times \vec{b}). \end{aligned}$$

Тогда площадь параллелограмма

$$|\vec{p} \times \vec{q}| = |-4(\vec{a} \times \vec{b})| = 4 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin \pi / 6 = 48.$$

Задача скачана с сайта [www.MatBuro.ru](http://www.MatBuro.ru)

Еще примеры: [https://www.matburo.ru/ex\\_ag.php?p1=agvect](https://www.matburo.ru/ex_ag.php?p1=agvect)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике