Решение задачи коммивояжера методом ветвей и границ

Решите методом ветвей и границ следующую задачу коммивояжера:

$$12.\ \begin{pmatrix} \infty & 10 & 15 & 11 & 2 & 55 \\ 17 & \infty & 16 & 18 & 21 & 13 \\ 10 & 50 & \infty & 39 & 22 & 3 \\ 28 & 29 & 24 & \infty & 28 & 25 \\ 27 & 9 & 32 & 9 & \infty & 2 \\ 43 & 48 & 40 & 43 & 21 & \infty \end{pmatrix}$$

Решение

Возьмем в качестве произвольного допустимого маршрута:

$$x_0 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6, 1)\}.$$

Тогда $F(x_0)$ = 10+16+39+28+2+43 = 138 – текущее значение Z_0 – (верхняя граница длин всех маршрутов).

Получим редуцированную матрицу $\overline{C}$.

$$C=\begin{pmatrix} \infty & 10 & 15 & 11 & 2 & 55 \\ 17 & \infty & 16 & 18 & 21 & 13 \\ 10 & 50 & \infty & 39 & 22 & 3 \\ 28 & 29 & 24 & \infty & 28 & 25 \\ 27 & 9 & 32 & 9 & \infty & 2 \\ 43 & 48 & 40 & 43 & 21 & \infty \end{pmatrix}\begin{matrix} 2 \\ 13 \\ 3 \\ 24 \\ 2 \\ 21 \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \infty & 8 & 13 & 9 & 0 & 53 \\ 4 & \infty & 3 & 5 & 8 & 0 \\ 7 & 47 & \infty & 36 & 19 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & \infty & 4 & 1 \\ 25 & 7 & 30 & 7 & \infty & 0 \\ 22 & 27 & 19 & 22 & 0 & \infty \end{pmatrix} \\ \hline \begin{matrix} 4 & 5 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{matrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} \infty & 3 & 13 & 4 & 0 & 53 \\ 0 & \infty & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 42 & \infty & 31 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 4 & 1 \\ 21 & 2 & 30 & 2 & \infty & 0 \\ 18 & 22 & 19 & 17 & 0 & \infty \end{pmatrix} = \overline{C}$$

Нижняя граница $d(x)$ = 2+13+3+24+2+21+4+5+5= 79. Данное значение является нижней границей длин всех маршрутов. Заметим, что в идеальном случае поиск решения заключался бы в выборе ровно одного нулевого элемента в каждой строке и каждом столбце. Другими словами, если бы такой маршрут нулевой длины бы быть найден, то длина оптимального маршрута равнялась бы 79. Исходя из верхней и нижней границ, можно заключить, что $79 \le F(x^*) \le 138$.

Выбор конкретной связи между пунктами производится с помощью характеристик, рассчитываемых для всех нулей приведенной матрицы. Характеристика считается как сумма наименьших элементов строки и столбца приведенной матрицы, в которых находится ноль. Сам ноль, для которого в данный момент считается характеристика, во внимание не берется.

Ноль с наибольшим значением характеристики указывает на связь между пунктами, которую следует оценить - включать ее в маршрут или от нее следует отказаться

Выберем дугу (r,s) с помощью вычисления значений функции $\Theta(\mu,\nu)$.

$$\Theta(1,5) = 3,\ \Theta(2,1) = 0,\ \Theta(2,4) = 2,\ \Theta(2,6) = 0,\ \Theta(3,6) = 3,\ \Theta(4,1) = 0,\ \Theta(4,2) = 2,\ \Theta(4,3) = 3,$$
$$\Theta(5,6) = 2,\ \Theta(6,5) = 17.$$

Следовательно, $\Theta(r,s)$ = (6,5). Осуществим разбиение (ветвление). Правое подмножество X_2 будет содержать все маршруты, которые исключают дугу (6,5). Поэтому $C_2\,(6,5) = +\infty$.

$$C_2 = \left(\begin{array}{cccccc} \infty & 3 & 13 & 4 & 0 & 53 \\ 0 & \infty & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 42 & \infty & 31 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 4 & 1 \\ 21 & 2 & 30 & 2 & \infty & 0 \\ 18 & 22 & 19 & 17 & \infty & \infty \end{array}\right)\begin{array}{|c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 17 \end{array} \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccc} \infty & 3 & 13 & 4 & 0 & 53 \\ 0 & \infty & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 42 & \infty & 31 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 4 & 1 \\ 21 & 2 & 30 & 2 & \infty & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & \infty & \infty \end{array}\right) \\ \hline \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccc} \infty & 3 & 13 & 4 & 0 & 53 \\ 0 & \infty & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 42 & \infty & 31 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 4 & 1 \\ 21 & 2 & 30 & 2 & \infty & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & \infty & \infty \end{array}\right) = \overline{C}_2\,.$$

Оценка снизу для правого подмножества X_2 определяется следующим образом:

$$d(X_2) = d(X) + \Theta(6,5) = 79 + 17 = 96 < Z_0.$$

Левое подмножество X_1 будет содержать маршруты, которые всегда включают дугу (6,5), и поэтому шестая строка и пятый столбец в матрицу C_1 не включаются. В результате будем иметь матрицу на единицу меньшего размера. Далее необходимо положить $C_1\,(5,6) = +\infty$, чтобы запретить подцикл {(6,5),(5,6)}. В результате получим матрицу

$$C_1 = \begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & \\ \hline 1 & \infty & 3 & 13 & 4 & 53 & 3 \\ 2 & 0 & \infty & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 42 & \infty & 31 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & \infty & 1 & 0 \\ 5 & 21 & 2 & 30 & 2 & \infty & 2 \end{array} \sim \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ \hline 1 & \infty & 0 & 10 & 1 & 50 \\ 2 & 0 & \infty & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 42 & \infty & 31 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & \infty & 1 \\ 5 & 19 & 0 & 28 & 0 & \infty \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} = \overline{C}_1.$$

Оценка снизу для левого подмножества:

$$d(X_1) = d(X) + \tau = 79 + 3+2 = 84 < Z_0,$$

где τ – константа приведения матрицы C_1

В списке кандидатов на ветвление множества X_1 и X_2. Так как $d(X_1) < d(X_2)$, будем производить ветвление множества X_1. Выберем дугу (r,s) с помощью значений функции $\Theta(\mu,\nu)$ для матрицы.

$$\Theta(1,2) = 1,\ \Theta(2,1) = 0,\ \Theta(2,4) = 0,\ \Theta(2,6) = 0,\ \Theta(3,6) = 3,\ \Theta(4,1) = 0,\ \Theta(4,2) = 0,\ \Theta(4,3) = 3,\ \Theta(5,2) = 0,\ \Theta(5,4) = 0.$$

Следовательно, $\Theta(r,s) = 3$, $(r,s) = (3,6)$.

Правая подматрица:

$$C_4 = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0 & 10 & 1 & 50 \\ 0 & \infty & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 42 & \infty & 31 & \infty \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 1 \\ 19 & 0 & 28 & 0 & \infty \end{pmatrix} \end{array}\left\|\begin{array}{c} \\ 0\\0\\3\\0\\0 \end{array}\right. \sim \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0 & 10 & 1 & 50 \\ 0 & \infty & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 39 & \infty & 28 & \infty \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 1 \\ 19 & 0 & 28 & 0 & \infty \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array} = \tilde{\bar{N}}_4 .$$

Оценка снизу для правого подмножества:

$$d(X_4) = d(X_1) + \Theta(3,6) = 84 + 3= 87 < Z_0.$$

Левая подматрица. Левое подмножество X_3 будет содержать маршруты, которые всегда включают дугу (3,6), и поэтому третья строка и шестой столбец в матрицу C_3 не включаются. В результате будем иметь матрицу на единицу меньшего размера. Далее необходимо положить C_3 (5,3) = $+\infty$, чтобы запретить подцикл {(3,6),(6,5),(5,3)}. В результате получим матрицу

$$C_3 = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0 & 10 & 1 \\ 0 & \infty & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty \\ 19 & 0 & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}\left\|\begin{array}{c} \\ 0\\0\\0\\0 \end{array}\right. \sim \begin{array}{c} \\ 1\\2\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0 & 10 & 1 \\ 0 & \infty & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty \\ 19 & 0 & \infty & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array} = \bar{C}_3 .$$

$$d(X_3) = d(X_1) + \tau = 84 + 0 = 84 < Z_0.$$

В списке кандидатов на ветвление множества X_3, X_4, X_2.

Минимальная нижняя оценка оказалась у множества X_3, следовательно, для дальнейшего разбиения выбираем множество X_3.

Определим дугу (r,s) с помощью значений функции $\Theta(\mu,\nu)$ для матрицы $\bar{C}_3$.

$$\Theta(1,2) = 1,\ \Theta(2,1) = 0,\ \Theta(2,4) = 0,\ \Theta(4,1) = 0,\ \Theta(4,2) = 0,\ \Theta(4,3) = 3,\ \Theta(5,2) = 0,\ \Theta(5,4) = 0.$$

Следовательно, Θ(r,s) =3, (r,s) = (4,3).

Правая подматрица.

$$C_6 = \begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline 1 & \infty & 0 & 10 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \infty & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \infty & \infty & 0 \\ 5 & 19 & 0 & \infty & 0 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \infty & 0 & 10 & 1 \\ 2 & 0 & \infty & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \infty & \infty \\ 5 & 19 & 0 & \infty & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \infty & 0 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & \infty & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \infty & \infty \\ 5 & 19 & 0 & \infty & 0 \end{array} = \overline{C}_6.$$

Оценка снизу для правого подмножества:

$$d(X_6) = d(X_3) + \Theta(1,4) = 84 + 3 = 87 < Z_0.$$

Левая подматрица. Левое подмножество X_5 будет содержать маршруты, которые всегда включают дугу (4,3), и поэтому четвертая строка и третий столбец в матрицу C_5 не включаются. В результате будем иметь матрицу на единицу меньшего размера. Далее необходимо положить $C_5(5,4) = +\infty$. В результате получим матрицу:

$$C_5 = \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 4 \\ \hline 1 & \infty & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \infty & 0 \\ 5 & 19 & 0 & \infty \end{array} = \overline{C}_5.$$

Оценка снизу для левого подмножества:

$$d(X_5) = d(X_4) + \tau = 84 + 0 = 84 < Z_0.$$

В списке кандидатов на ветвление множества X_5, X_6, X_2, X_4.

Минимальная нижняя оценка оказалась у множества X_5, следовательно, для дальнейшего разбиения выбираем множество X_5. Определим дугу (r,s) с помощью значений функции Θ(μ,ν) для матрицы $\overline{C}_5$.

$$\Theta(1,2) = 1,\ \Theta(2,1) = 19,\ \Theta(2,4) = 0,\ \Theta(5,2) = 0,\ \Theta(5,4) = 0.$$

Следовательно, Θ(r,s) = 19, (r,s) = (2,1).

Правая подматрица:

$$C_8 = \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 4 & \\ \hline 1 & \infty & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \infty & \infty & 0 & 0 \\ 5 & 19 & 0 & \infty & 0 \end{array} \sim \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 4 \\ \hline 1 & \infty & 0 & 1 \\ 2 & \infty & \infty & 0 \\ 5 & 19 & 0 & \infty \\ \hline & 19 & 0 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 4 \\ \hline 1 & \infty & 0 & 1 \\ 2 & \infty & \infty & 0 \\ 5 & 0 & 0 & \infty \end{array} = \overline{C}_8.$$

Оценка снизу для правого подмножества:

$$d(X_8) = d(X_5) + \Theta(5,2) = 84+ 19 = 103 < Z_0.$$

Левая подматрица. Левое подмножество X_7 будет содержать маршруты, которые всегда включают дугу (2,1), и поэтому вторая строка и первый столбец в матрицу C_7 не включаются. В результате будем иметь матрицу на единицу меньшего размера. Далее необходимо положить $C_7\,(1,2) = +\infty$, чтобы запретить подцикл {(1,2), (2,1) }.

$$C_7 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 1 \\ 19 & \infty \end{pmatrix} \end{array} = \overline{C}_7 .$$

Оценка снизу для левого подмножества:

$$d(X_7) = d(X_5) + \tau = 84 + 0 = 84 < Z_0.$$

В списке кандидатов на ветвление множества X_2, X_4, X_6, X_7, X_8. Множество X_7 содержит единственный маршрут с минимальной нижней оценкой, поэтому задача решена.

$X_1 = \{(1,4)(4,3)(3,6),(6,5),(5,2),(2,1)\} = X^*$;

$$Z_0 = F(x^*) = 11+37+3+24+9+1 = 84.$$