

**Задача с решением (приведение к каноническому виду)
Дифференциальное уравнение в частных производных**

ЗАДАНИЕ.

Привести к каноническому виду уравнение $u''_{xx} + 2u''_{xy} + u''_{yy} - 2u'_x - 5u'_y - 3u + xy = 0$

РЕШЕНИЕ.

Находим дискриминант:

$$D = 1^2 - 1 \cdot 1 = 0, \text{ значит, уравнение параболического типа.}$$

Выписываем характеристическое уравнение:

$$dy^2 - 2dx dy + dx^2 = 0,$$

откуда

$$(dy - dx)^2 = 0,$$

$$dy - dx = 0$$

$$y - x = C.$$

Делаем замену: $\xi = y - x, \eta = x$.

Тогда

$$u'_x = u'_\xi \xi'_x + u'_\eta \eta'_x = -u'_\xi + u'_\eta$$

$$u'_y = u'_\xi$$

$$u''_{xx} = -u''_{\xi\xi} \xi'_x - u''_{\xi\eta} \eta'_x + u''_{\eta\xi} \xi'_x + u''_{\eta\eta} \eta'_x = u''_{\xi\xi} - 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}$$

$$u''_{xy} = u''_{\xi\xi} \xi'_x + u''_{\xi\eta} \eta'_x = -u''_{\xi\xi} + u''_{\xi\eta}$$

$$u''_{yy} = u''_{\xi\xi} \xi'_y + u''_{\xi\eta} \eta'_y = u''_{\xi\xi}$$

$$x = \eta, y = \xi + \eta.$$

Подставляем в $u''_{xx} + 2u''_{xy} + u''_{yy} - 2u'_x - 5u'_y - 3u + xy = 0$

Задача по ДУ в ЧП скачана с https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=maducp
(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

И получаем канонический вид:

$$u''_{\xi\xi} - 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta} - 2u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\xi\xi} + 2u'_\xi - 2u'_\eta - 5u'_\xi - 3u + \eta(\xi + \eta) = 0$$

или

$$u''_{\eta\eta} - 3u'_\xi - 2u'_\eta - 3u + \xi\eta + \eta^2 = 0$$