# Задача с решением
# Система дифференциальных уравнений в частных производных

ЗАДАНИЕ.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{x}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y}. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

Проверим условие совместности:

$$A'_y+A'_zB-B'_x-B'_zA=\left(\frac{z}{x}\right)'_y+\left(\frac{z}{x}\right)'_z\left(\frac{z}{y}\right)-\left(\frac{z}{y}\right)'_x-\left(\frac{z}{y}\right)'_z\left(\frac{z}{x}\right)=$$

$$=0+\frac{1}{x}\cdot\frac{z}{y}-0-\frac{1}{y}\cdot\frac{z}{x}=0.$$

Так как условие совместности выполняется тождественно, то система имеет множество решений. Проинтегрируем первое равенство по x:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x},$$

$$\ln z(x,y)=\ln x+\ln\varphi(y)=\ln\left(x\cdot\varphi(y)\right),$$

$$z(x,y)=x\cdot\varphi(y).$$

Подставляя во второе уравнение, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\varphi'(y)=\frac{z}{y}=\frac{x\cdot\varphi(y)}{y},$$

$$\varphi'(y)=\frac{\varphi(y)}{y}.$$

Отсюда

$$\frac{d\varphi}{\varphi}=\frac{dy}{y},$$

$$\ln\varphi(y)=\ln y+\ln C=\ln Cy..$$

$$\varphi(y)=Cy.$$

Окончательно получим:
$z(x,y) = x \cdot \varphi(y) = Cxy.$