Нахождение изображения оригинала двумя способами (преобразование Лапласа и таблицы)

ЗАДАНИЕ.

Найти изображение оригинала $f(x)$ двумя способами:

1) Вычислив интеграл $F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(x)e^{-px}dx$;
2) Воспользовавшись таблице изображений и свойствами преобразования Лапласа.

Оригинал задается формулой:

$$f(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 0, \\ a,\ A_1\le x<B_1, \\ bx+c,\ A_2\le x<B_2, \\ dx+e,\ A_3\le x<B_3. \end{cases}$$

$A_2=0,\ B_2=A_3=A,\ B_3=A_1=B,\ B_1=+\infty$, $A=1,\ B=5,\ a=3,\ b=-2,\ c=5,\ d=1,\ e=1$.

РЕШЕНИЕ.

Запишем аналитическое выражение для оригинала, используя данные задачи:

$$f(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 0, \\ 3,\ 5\le x<+\infty, \\ -2x+5,\ 0\le x<1, \\ x+1,\ 1\le x<5. \end{cases} \quad \text{или} \quad f(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 0, \\ -2x+5,\ 0\le x<1, \\ x+1,\ 1\le x<5, \\ 3,\ 5\le x<+\infty. \end{cases}$$

1) Вычисляем интеграл:

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(x)e^{-px}dx=\int\limits_0^1(-2x+5)e^{-px}dx+\int\limits_1^5(x+1)e^{-px}dx+\int\limits_5^{+\infty}3e^{-px}dx=$$

$$=-2\int\limits_0^1 xe^{-px}dx+5\int\limits_0^1 e^{-px}dx+\int\limits_1^5 xe^{-px}dx+\int\limits_1^5 e^{-px}dx+3\int\limits_5^{+\infty} e^{-px}dx=$$

Вычислим отдельно интеграл вида:

$$\int xe^{-px}dx = \begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=e^{-px}dx & v=-\dfrac{1}{p}e^{-px} \end{vmatrix} = -\frac{1}{p}e^{-px}x+\frac{1}{p}\int e^{-px}dx = -\frac{1}{p}e^{-px}x-\frac{1}{p^2}e^{-px}+C.$$

Вычисляем далее:

$$=-2\left(-\frac{1}{p}e^{-px}x-\frac{1}{p^2}e^{-px}\right)\Bigg|_0^1+5\left(-\frac{1}{p}e^{-px}\right)\Bigg|_0^1+\left(-\frac{1}{p}e^{-px}x-\frac{1}{p^2}e^{-px}\right)\Bigg|_1^5+\left(-\frac{1}{p}e^{-px}\right)\Bigg|_1^5+3\left(-\frac{1}{p}e^{-px}\right)\Bigg|_5^{+\infty}=$$

$$=-2\left(-\frac{1}{p}e^{-p}-\frac{1}{p^2}e^{-p}\right)+2\left(-\frac{1}{p^2}\right)+5\left(-\frac{1}{p}e^{-p}+\frac{1}{p}\right)+\left(-\frac{5}{p}e^{-5p}-\frac{1}{p^2}e^{-5p}\right)-\left(-\frac{1}{p}e^{-p}-\frac{1}{p^2}e^{-p}\right)+$$

$$+\left(-\frac{1}{p}e^{-5x}+\frac{1}{p}e^{-p}\right)+3\left(-\frac{1}{p}e^{-\infty}\right)-3\left(-\frac{1}{p}e^{-5p}\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{p}+\frac{2}{p^2}-\frac{5}{p}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}\right)e^{-p}+\left(-\frac{2}{p^2}+\frac{5}{p}\right)+\left(-\frac{5}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}+\frac{3}{p}\right)e^{-5p}=$$

$$=\left(-\frac{1}{p}+\frac{3}{p^2}\right)e^{-p}+\left(-\frac{2}{p^2}+\frac{5}{p}\right)+\left(-\frac{3}{p}-\frac{1}{p^2}\right)e^{-5p}.$$

Получили: $F(p)=\left(-\dfrac{1}{p}+\dfrac{3}{p^2}\right)e^{-p}+\left(-\dfrac{3}{p}-\dfrac{1}{p^2}\right)e^{-5p}-\dfrac{2}{p^2}+\dfrac{5}{p}.$

2) Используем таблицу изображений и свойства преобразования Лапласа.

Представим оригинал

$$f(x)=\begin{cases} 0,\ x\le 0, \\ -2x+5,\ 0\le x<1, \\ x+1,\ 1\le x<5, \\ 3,\ 5\le x<+\infty. \end{cases}$$

в виде:

$$f(x)=(-2x+5)\eta(x)+(x+1)\eta(x-1)-(-2x+5)\eta(x-1)+3\eta(x-5)-$$

$$-(x+1)\eta(x-5)=$$

$$=(-2x+5)\eta(x)+(x+1+2x-5)\eta(x-1)+(3-x-1)\eta(x-5)=$$

$$=(-2x+5)\eta(x)+(3x-4)\eta(x-1)+(-x+2)\eta(x-5)=$$

$$=(-2x+5)\eta(x)+(3(x-1)-1)\eta(x-1)+(-(x-5)-3)\eta(x-5).$$

Тогда изображение равно (по теореме запаздывания):

$$F(p)=\left(-\frac{2}{p^2}+\frac{5}{p}\right)+\left(\frac{3}{p^2}-\frac{1}{p}\right)e^{-p}+\left(-\frac{1}{p^2}-\frac{3}{p}\right)e^{-5p}$$

Результаты совпали.