(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Решение задачи Коши для системы ДУ с помощью преобразования Лапласа

ЗАДАНИЕ.

Решите задачу Коши для системы дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y, \end{cases} \quad x(0) = 0, \ y(0) = 1.$$

Решение.

Перейдем к изображениям:

$$x(t) \Leftrightarrow X(p)$$
,
 $x'(t) \Leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p)$,
 $y(t) \Leftrightarrow Y(p)$,
 $y'(t) \Leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$.

Получаем систему:

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) - 2Y(p), \\ pY(p) - 1 = X(p) + 3Y(p); \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(p)(p-1) + 2Y(p) = 0, \\ -X(p) + Y(p)(p-3) = 1; \end{cases}$$

Найдем решение системы по формулам Крамера.

Основной определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & 2 \\ -1 & p-3 \end{vmatrix} = (p-1)(p-3) + 2 = p^2 - 4p + 5.$$

Дополнительные определители:

Задача по операционному исчислению скачана с https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=maoper

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & p-3 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p-1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = p-1.$$

Получаем:

$$X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2}{p^2 - 4p + 5}, Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{p - 1}{p^2 - 4p + 5}.$$

Возвращаемся к оригиналам:

$$X(p) = \frac{-2}{p^2 - 4p + 5} = -2\frac{1}{(p-2)^2 + 1} = \Leftrightarrow -2e^{2t} \sin t = x(t).$$

$$Y(p) = \frac{p-1}{p^2 - 4p + 5} = \frac{p-2+1}{(p-2)^2 + 1} = \frac{p-2}{(p-2)^2 + 1} + \frac{1}{(p-2)^2 + 1} \Leftrightarrow e^{2t} \cos t + e^{2t} \sin t = y(t).$$

Получили решение:

$$\begin{cases} x(t) = -2e^{2t} \sin t, \\ y(t) = e^{2t} \cos t + e^{2t} \sin t. \end{cases}$$