

Операционное исчисление Решение задачи Коши для ДУ 3-го порядка

ЗАДАНИЕ.

Методом операционного исчисления найти решение задачи Коши

$$x''' + x'' - 2x' - 5x = 5e^t, \quad x(0) = 0, x'(0) = 1, x''(0) = 2$$

РЕШЕНИЕ.

Пусть $x(t) \doteq Y(p)$. По теореме о дифференцировании оригинала:

$$x'(t) \doteq pX(p) - x(0) = pX(p) - 0 = pX(p)$$

$$x''(t) \doteq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - 0p - 1 = p^2X(p) - 1$$

$$x'''(t) \doteq p^3X(p) - p^2x(0) - px'(0) - x''(0) = p^3X(p) - p - 2$$

Изображение левой части уравнения:

$$\begin{aligned} x''' + x'' - 2x' - 5x &\doteq (p^3X(p) - p - 2) + (p^2X(p) - 1) - 2pX(p) - 5X(p) \\ &= \\ &= X(p) \cdot (p^3 + p^2 - 2p - 5) - p - 3 \end{aligned}$$

Изображение правой части уравнения:

$$5e^t \doteq \frac{5}{p-1}$$

Уравнение примет вид

$$X(p) \cdot (p^3 + p^2 - 2p - 5) - p - 3 = \frac{5}{p-1}$$

Решим полученное уравнение относительно $X(p)$:

$$\begin{aligned} X(p) \cdot (p^3 + p^2 - 2p - 5) &= \frac{5}{p-1} + p + 3 = \frac{5 + p^2 + 3p - p - 3}{p-1} \\ &= \frac{p^2 + 2p + 2}{p-1} \end{aligned}$$

$$X(p) = \frac{p^2 + 2p + 2}{(p-1)(p^3 + p^2 - 2p - 5)}$$

Теперь по полученному изображению восстановим оригинал $x(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{p^2 + 2p + 2}{(p-1)(p^3 + p^2 - 2p - 5)} &= \frac{A}{p-1} + \frac{Bp^2 + Cp + D}{p^3 + p^2 - 2p - 5} = \\ &= \frac{(A+B)p^3 + (A-B+C)p^2 + (-2A-C+D)p + (-5A-D)}{(p-1)(p^3 + p^2 - 2p - 5)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=1 \\ 2A-C+D=2 \\ -5A-D=2 \end{cases} \rightarrow A=-1; B=1; C=3; D=3$$

$$X(p) = \frac{p^2 + 2p + 2}{(p-1)(p^3 + p^2 - 2p - 5)} = -\frac{1}{p-1} + \frac{p^2 + 3p + 3}{p^3 + p^2 - 2p - 5}$$

Оригинал изображения

$$\frac{p^2 + 3p + 3}{p^3 + p^2 - 2p - 5}$$

можно найти, только используя приближенные вычисления. Корни уравнения $p^3 + p^2 - 2p - 5 = 0$ находятся численно: $p_1 \approx 1.7573$; $p_{2,3} \approx -1.3786 \pm 0.9719i$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{p^3 + p^2 - 2p - 5}{p^2 + 3p + 3} &\approx \frac{(p - 1.7573)(p^2 + 2.7572p + 2.8451275)}{p^2 + 3p + 3} \\ \frac{p^3 + p^2 - 2p - 5}{p^3 + p^2 - 2p - 5} &\approx \frac{(p - 1.7573)(p^2 + 2.7572p + 2.8451275)}{1.0540(p - 1.7573)(p^2 + 2.7572p + 2.8451275)} \approx \\ &\approx \frac{1.0540}{p - 1.7573} - \frac{0.0540p + 0.0008}{p^2 + 2.7572p + 2.8451275} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{0.0540p + 0.0008}{p^2 + 2.7572p + 2.8451275} &\approx \frac{0.0540p + 0.0008}{(p + 1.3786)^2 + 0.9719^2} \\ &\approx \frac{0.0540(p + 1.3786) - 0.0736}{(p + 1.3786)^2 + 0.9719^2} = \\ &= 0.0540 \cdot \frac{(p + 1.3786)}{(p + 1.3786)^2 + 0.9719^2} - 0.0757 \cdot \frac{0.9719}{(p + 1.3786)^2 + 0.9719^2} \end{aligned}$$

Итак, окончательно

$$\begin{aligned} X(p) \approx &-\frac{1}{p-1} + \frac{1.0540}{p-1.7573} - 0.0540 \cdot \frac{(p + 1.3786)}{(p + 1.3786)^2 + 0.9719^2} + \\ &+ 0.0757 \cdot \frac{0.9719}{(p + 1.3786)^2 + 0.9719^2} \end{aligned}$$

Тогда оригинал:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{p-1} &\doteq -e^t \\ \frac{1.0540}{p-1.7573} &\doteq 1.0540e^{1.7573t} \\ -0.0540 \cdot \frac{(p + 1.3786)}{(p + 1.3786)^2 + 0.9719^2} &\doteq -0.0540e^{-1.3786t} \cos 0.9719t \\ 0.0757 \cdot \frac{0.9719}{(p + 1.3786)^2 + 0.9719^2} &\doteq 0.0757e^{-1.3786t} \sin 0.9719t \\ x(t) \approx &-e^t + 1.0540e^{1.7573t} - 0.0540e^{-1.3786t} \cos 0.9719t \\ &+ 0.0757e^{-1.3786t} \sin 0.9719t \end{aligned}$$

Задача по операционному исчислению скачана с
https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=maoper
(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

ОТВЕТ.

$$x(t) \approx -e^t + 1.0540e^{1.7573t} - 0.0540e^{-1.3786t} \cos 0.9719t \\ + 0.0757e^{-1.3786t} \sin 0.9719t$$