Операционное исчисление
Решение задачи Коши для ДУ 3-го порядка

ЗАДАНИЕ.

Методом операционного исчисления найти решение задачи Коши

$$x''' + x'' - 2x' - 5x = 5e^t, \qquad x(0) = 0, x'(0) = 1, x''(0) = 2$$

РЕШЕНИЕ.

Пусть $x(t) \doteqdot Y(p)$. По теореме о дифференцировании оригинала:

$$x'(t) \doteqdot pX(p) - x(0) = pX(p) - 0 = pX(p)$$
$$x''(t) \doteqdot p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - 0p - 1 = p^2X(p) - 1$$
$$x'''(t) \doteqdot p^3X(p) - p^2x(0) - px'(0) - x''(0) = p^3X(p) - p - 2$$

Изображение левой части уравнения:

$$x''' + x'' - 2x' - 5x \doteqdot (p^3X(p) - p - 2) + (p^2X(p) - 1) - 2pX(p) - 5X(p) =$$
$$= X(p) \cdot (p^3 + p^2 - 2p - 5) - p - 3$$

Изображение правой части уравнения:

$$5e^t \doteqdot \frac{5}{p-1}$$

Уравнение примет вид

$$X(p) \cdot (p^3 + p^2 - 2p - 5) - p - 3 = \frac{5}{p-1}$$

Решим полученное уравнение относительно $X(p)$:

$$X(p) \cdot (p^3 + p^2 - 2p - 5) = \frac{5}{p-1} + p + 3 = \frac{5 + p^2 + 3p - p - 3}{p-1} = \frac{p^2 + 2p + 2}{p-1}$$

$$X(p) = \frac{p^2 + 2p + 2}{(p-1)(p^3 + p^2 - 2p - 5)}$$

Теперь по полученному изображению восстановим оригинал $x(t)$.

$$\frac{p^2 + 2p + 2}{(p-1)(p^3 + p^2 - 2p - 5)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp^2 + Cp + D}{p^3 + p^2 - 2p - 5} =$$
$$= \frac{(A+B)p^3 + (A - B + C)p^2 + (-2A - C + D)p + (-5A - D)}{(p-1)(p^3 + p^2 - 2p - 5)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B + C = 1 \\ 2A - C + D = 2 \\ -5A - D = 2 \end{cases} \to A = -1; B = 1; C = 3; D = 3$$

$$X(p)=\frac{p^2+2p+2}{(p-1)(p^3+p^2-2p-5)}=-\frac{1}{p-1}+\frac{p^2+3p+3}{p^3+p^2-2p-5}$$

Оригинал изображения

$$\frac{p^2+3p+3}{p^3+p^2-2p-5}$$

можно найти, только используя приближенные вычисления. Корни уравнения $p^3+p^2-2p-5=0$ находятся численно: $p_1\approx 1.7573; p_{2,3}\approx -1.3786\pm 0.9719i$

Тогда

$$p^3+p^2-2p-5\approx (p-1.7573)(p^2+2.7572p+2.8451275)$$

$$\frac{p^2+3p+3}{p^3+p^2-2p-5}\approx\frac{p^2+3p+3}{(p-1.7573)(p^2+2.7572p+2.8451275)}\approx$$

$$\approx\frac{1.0540}{p-1.7573}-\frac{0.0540p+0.0008}{p^2+2.7572p+2.8451275}$$

$$\frac{0.0540p+0.0008}{p^2+2.7572p+2.8451275}\approx\frac{0.0540p+0.0008}{(p+1.3786)^2+0.9719^2}$$

$$\approx\frac{0.0540(p+1.3786)-0.0736}{(p+1.3786)^2+0.9719^2}=$$

$$=0.0540\cdot\frac{(p+1.3786)}{(p+1.3786)^2+0.9719^2}-0.0757\cdot\frac{0.9719}{(p+1.3786)^2+0.9719^2}$$

Итак, окончательно

$$X(p)\approx -\frac{1}{p-1}+\frac{1.0540}{p-1.7573}-0.0540\cdot\frac{(p+1.3786)}{(p+1.3786)^2+0.9719^2}+$$

$$+0.0757\cdot\frac{0.9719}{(p+1.3786)^2+0.9719^2}$$

Тогда оригинал:

$$-\frac{1}{p-1}\doteqdot -e^t$$

$$\frac{1.0540}{p-1.7573}\doteqdot 1.0540e^{1.7573t}$$

$$-0.0540\cdot\frac{(p+1.3786)}{(p+1.3786)^2+0.9719^2}\doteqdot -0.0540e^{-1.3786t}\cos 0.9719t$$

$$0.0757\cdot\frac{0.9719}{(p+1.3786)^2+0.9719^2}\doteqdot 0.0757e^{-1.3786t}\sin 0.9719t$$

$$x(t)\approx -e^t+1.0540e^{1.7573t}-0.0540e^{-1.3786t}\cos 0.9719t$$
$$+0.0757e^{-1.3786t}\sin 0.9719t$$

ОТВЕТ.

$$x(t) \approx -e^{t} + 1.0540e^{1.7573t} - 0.0540e^{-1.3786t}\cos 0.9719t + 0.0757e^{-1.3786t}\sin 0.9719t$$