Многокритериальная оптимизация

Задание.

Сформулировать экономическую задачу с двумя критериями эффективности и не менее 4 условий (ограничений).
Двумя способами:
1) методом идеальной точки
2) сведением к ЗЛП
Решая задачу вторым методом, добавьте дополнительное условие (ограничение) от ЛПР - обоснуйте. Работа выполняется индивидуально. Сделать выводы по полученным данным.

$y_1 = ax_1+bx_2 -f \rightarrow \max$
$y_2 = cx_1+dx_2 -g \rightarrow \max$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$, i=1,2,3
$x_{1,2} \ge 0$

Решение.

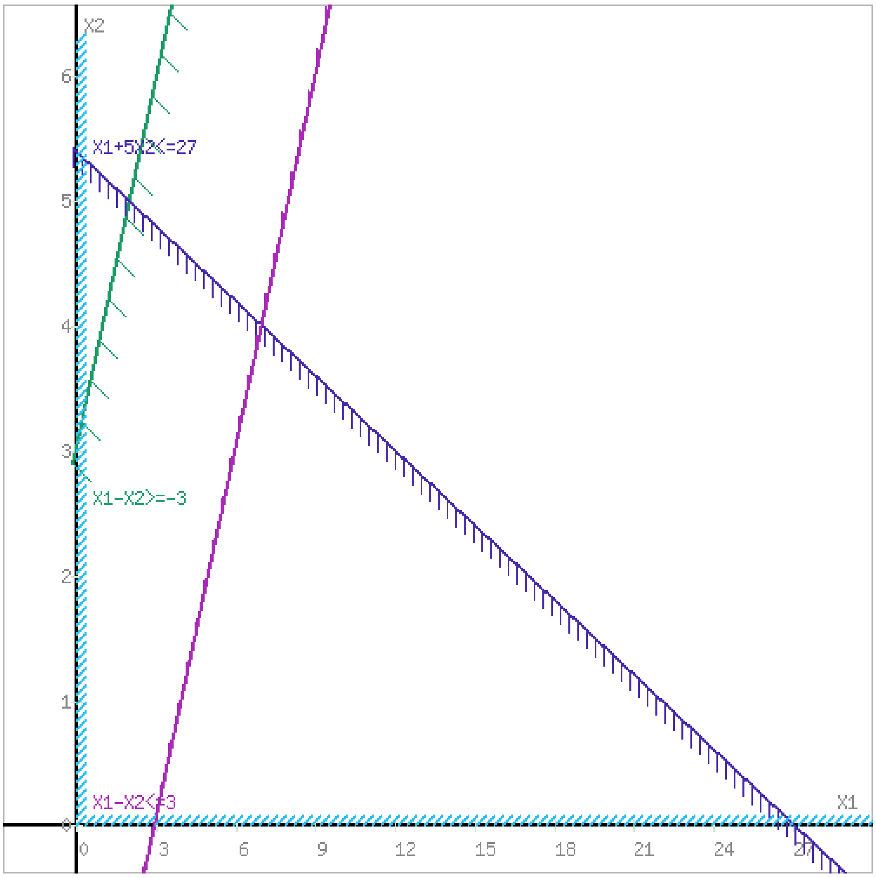
Положим организация производит 2 продукта стоимостью 6 и 2 единицы, социальная значимость которых -5 и 6 единиц соответственно:
тогда прибыль организации = $y_1 = 6x_1 + 2x_2$
достигнутый уровень социальной значимости: $y_2 = -5x_1 + 6x_2$
То есть имеется две целевые функции

$$y_1 = 6x_1 + 2x_2$$
$$y_2 = -5x_1 + 6x_2$$

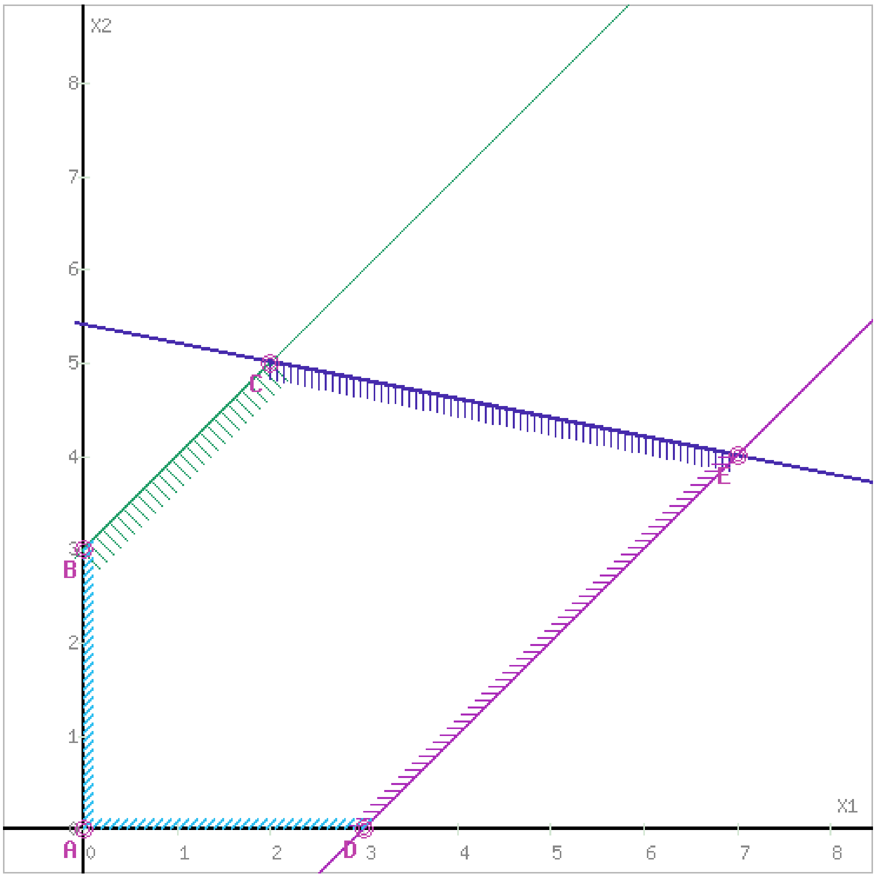
Разница между 2 и 1 товаром – не более 3: $x_1 - x_2 \ge -3$.
Разница между 1 и 2 товаром – не более 3: $x_1 - x_2 \le 3$.
Ресурс, расходуемый на единицу 1 товара – 1, на единицу 2 товара – 5 в наличии 27.
Получаем ограничения задачи:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -3 \\ x_1 + 5x_2 \le 27 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Построим область допустимых решений.


X2
X1
X1+5X2<=27
X1-X2>=-3
X1-X2<=3
0
3
6
9
12
15
18
21
24
27
1
2
3
4
5
6

Обозначим границы области многоугольника решений.



Получили область ограниченную точками:

A(0,0), B(0,3), C(2,5), E(7,4). D(3,0).

Найдем координаты образов точек *O*, *A*, *B*, *C*, *D* в линейном преобразовании, определяемом целевыми функциями:

$A(0;0)$: $y1 = 6x + 2y = 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$

$y2 = -5x + 6y = -5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0$

Таким образом, $A(0;0) \to A'(0;0)$.

$B(0;3)$: $y1 = 6x + 2y = 6 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 6$

$y2 = -5x + 6y = -5 \cdot 0 + 6 \cdot 3 = 18$

Таким образом, $B(0;3) \to B'(6;18)$.

$C(2;5)$: $y1 = 6x + 2y = 6 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 22$

$y2 = -5x + 6y = -5 \cdot 2 + 6 \cdot 5 = 20$

Таким образом, $C(2;5) \to C'(22;20)$.

$E(7;4)$: $y1 = 6x + 2y = 6 \cdot 7 + 2 \cdot 4 = 50$

$y2 = -5x + 6y = -5 \cdot 7 + 6 \cdot 4 = -11$

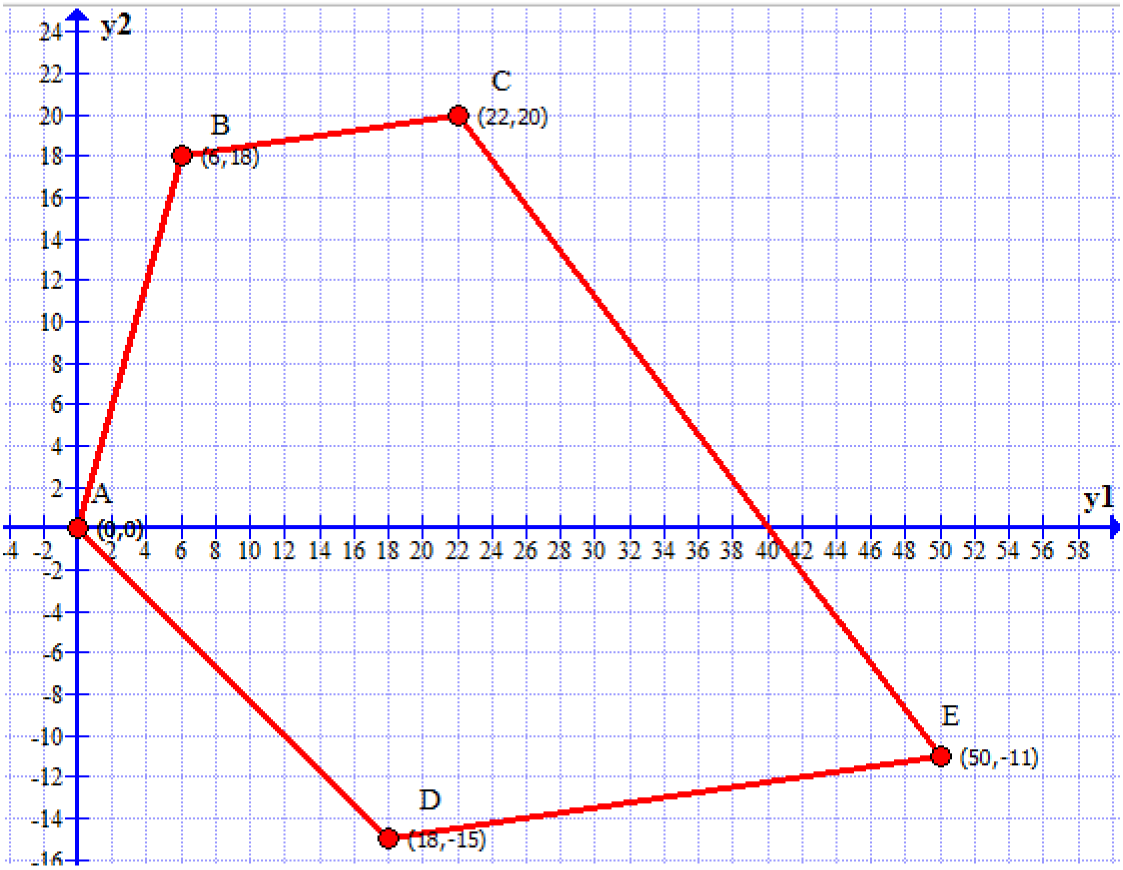
Таким образом, $E(5;2) \to E'(34;-11)$.

$D(3;0)$: $y1 = 6x + 2y = 6 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 18$

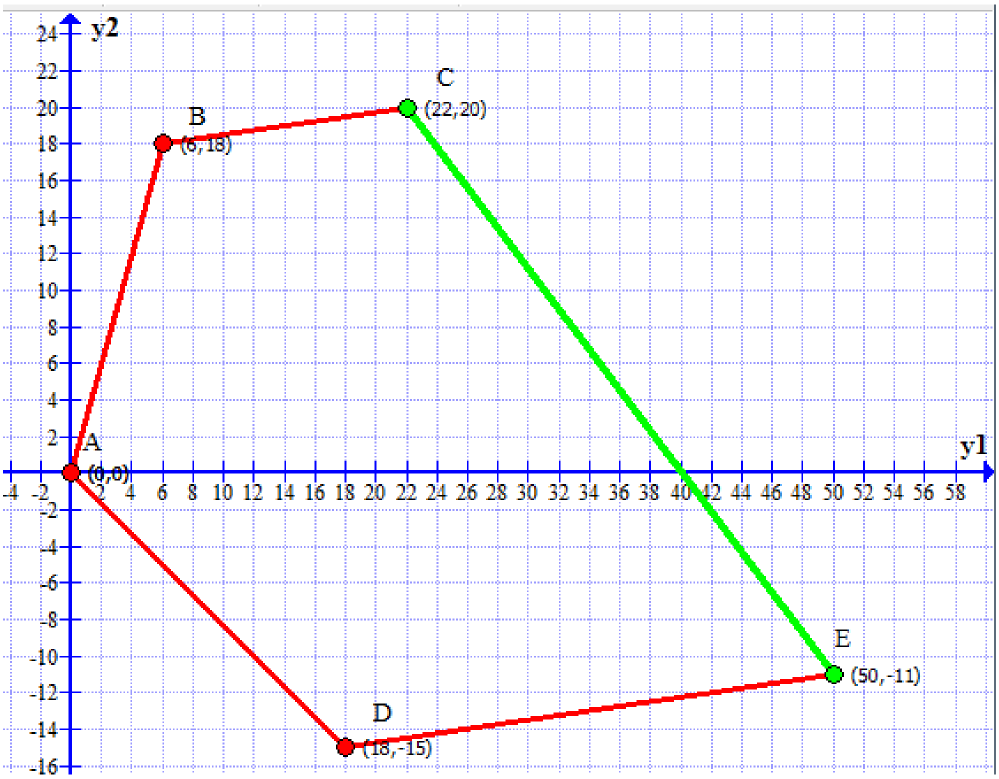
$y2 = -5x + 6y = -5 \cdot 3 + 6 \cdot 0 = -15$

Таким образом, $D(3;0) \to D'(18;-15)$.

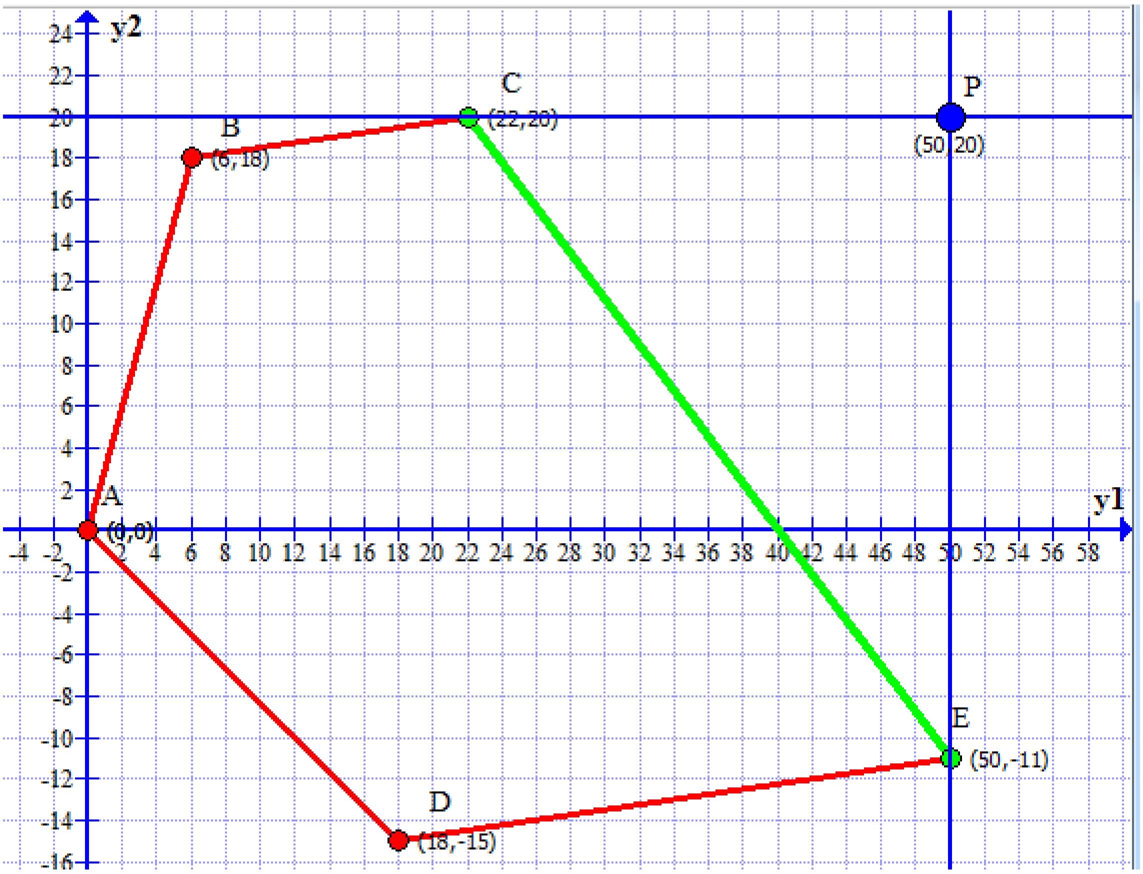
По найденным координатам точек построим в критериальной плоскости $y1Oy2$ образ многоугольника $ABCED$ – многоугольник $A'B'C'E'D'$.



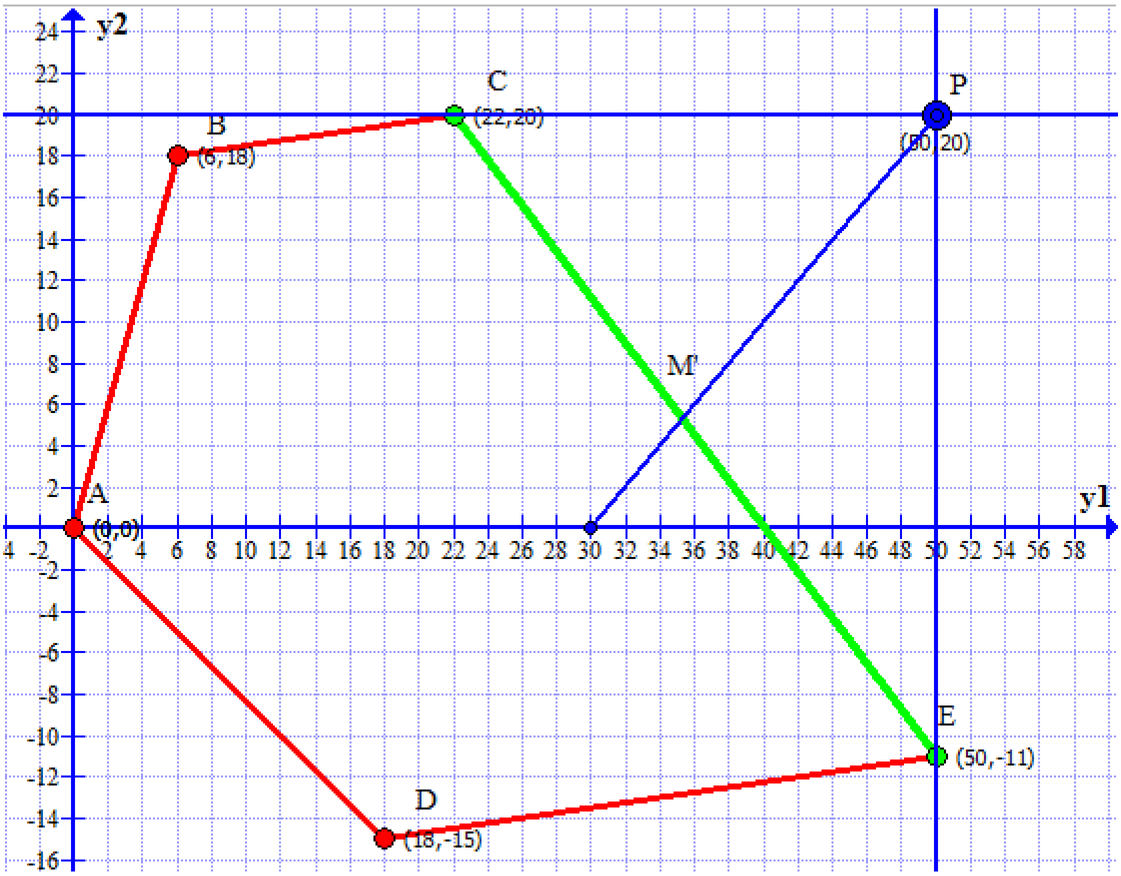
3. В критериальной плоскости найдем границу Парето – северо-восточную границу области $A'B'C'E'D'$.



Точкой утопии, в которой достигается максимум одновременно по двум критериям *y1* и *y2*, является точка *P*: через самую высокую (северную) точку области $A'B'C'E'D'$ провели горизонтальную прямую (через точку C') и через самую правую (восточную) точку области $O'A'B'C'D'$ провели вертикальную прямую (через точку E'); точка – точка пересечения горизонтальной и вертикальной прямой.



4. На границе Парето найдем *идеальную точку* – точку, наиболее близко расположенную к точке утопии. В нашем случае это основание перпендикуляра, опущенного из точки утопии P на отрезок $O'D'$ – точка M'



Найдем координаты точки M'. Для этого найдем уравнение прямой $C'E'$. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки:

$'(22;\ 20)$, $D'(50;\ -11)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

$$\frac{x-22}{50-22}=\frac{y-20}{-11-20},$$

$$\mathrm{C'E'}:\ 31x+28y=1242$$

Найдем уравнение перпендикуляра, опущенного из точки утопии P на отрезок $C'E'$. Воспользуемся уравнением прямой с точкой и вектором нормали:

$\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{C'E'}}=(50-22;\ -11-20)=(28;\ -31), P(50;\ 20)$

$$n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)=0,$$

$$28\cdot(x-50)-31\cdot(y-20)=0,$$

$$PM':\ 28x-31y-780=0.$$

Координаты точки M': $\begin{cases}31x+28y=1242\\ 28x-31y=780\end{cases}$

Решение уравнения $\begin{cases}x=34{,}58,\\ y=6{,}07.\end{cases}$

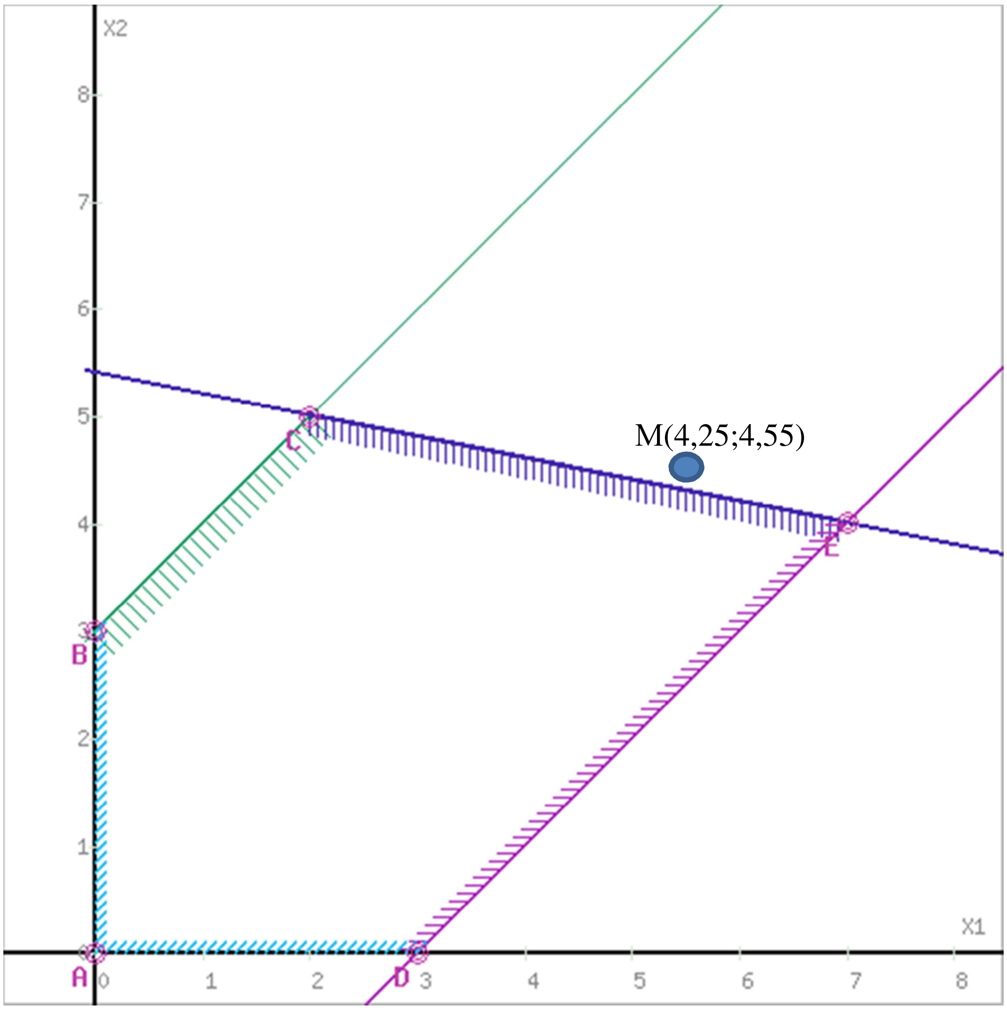
Таким образом, $M'(3; -3)$, а значит, компромиссное решение позволит достигнуть значений целевых функций: $U = 3$, $V = -3$.

5. Найдем координаты точки в плоскости xOy, которой соответствует точка M' критериальной плоскости. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y1 = 34{,}58, \\ y2 = 6{,}07, \end{cases} \begin{cases} 6x + 2y = 34{,}58, \\ -5x + 6y = 6{,}07, \end{cases} \begin{cases} x = 4.25, \\ y = 4.55. \end{cases}$$

Получили, что компромиссным решением метода идеальной точки является $M(4.25;\ 4.55)$, в которой критерии достигают значений $y1 = 34.58$, $y2 = 6.07$.

Эта точка принадлежит отрезку CE.



Ответ: $M(4{,}25;\ 4{,}55)$, $y1_{\max}(4{,}25;\ 4{,}55) = 34{,}58$, $y2_{\max}(1{,}5;\ 0) = 6{,}07$.

Возвращаясь к первоначальной задаче:

$x_1 = 4{,}25$ – выпуск 1 товара

$x_2 = 4{,}55$ – выпуск 2 товара

Прибыль = 34,58

Уровень социальной значимости = 6,07.

Далее сводим задачу к задаче линейного программирования, для чего условимся, что нам достаточно уровня социальной значимости 5.

Тогда вместо $y_2 = -5x_1 + 6x_2$ получаем ограничение: $-5x_1 + 6x_2 \ge 5$

Задача ЛП:

$f = 6x_1 + 2x_2 \to \max$

Ограничения задачи:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -3 \\ x_1 + 5x_2 \le 27 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ -5x_1 + 6x_2 \ge 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решаем ее симплекс методом.

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных.

$-1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 3$

$1x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 27$

$1x_1 - 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 3$

$-5x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 1x_6 = 5$

Введем искусственные переменные x: в 4-м равенстве вводим переменную x_7;

$-1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 3$

$1x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 27$

$1x_1 - 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 3$

$-5x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 1x_6 + 1x_7 = 5$

Для постановки задачи на максимум целевую функцию запишем так:

$F(X) = 6x_1 + 20x_2 - Mx_7 \to \max$

Из уравнений выражаем искусственные переменные:

$x_7 = 5 + 5x_1 - 6x_2 + x_6$

которые подставим в целевую функцию:

$F(X) = 6x_1 + 2x_2 - M(5 + 5x_1 - 6x_2 + x_6) \to \max$

или

$F(X) = (6-5M)x_1 + (2+6M)x_2 + (-M)x_6 + (-5M) \to \max$

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x_3, x_4, x_5, x_7

Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план:

X1 = (0,0,3,27,3,0,5)

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	3	-1	1	1	0	0	0	0
x_4	27	1	5	0	1	0	0	0
x_5	3	1	-1	0	0	1	0	0
x_7	5	-5	6	0	0	0	-1	1
F(X0)	-5M	-6+5M	-2-6M	0	0	0	M	0

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

В индексной строке F(x) выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_2, так как это наибольший коэффициент по модулю.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i2}

и из них выберем наименьшее:

$$\min\left[\frac{3}{1}, \frac{27}{5}, -, \frac{5}{6}\right] = 0.83$$

Следовательно, 4-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (6) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	min
x_3	3	-1	1	1	0	0	0	0	3
x_4	27	1	5	0	1	0	0	0	5,4
x_5	3	1	-1	0	0	1	0	0	-
x_7	5	-5	**6**	0	0	0	-1	1	**0,83**
F(X1)	-5M	-6+5M	**-2-6M**	0	0	0	M	0	0

Формируем следующую часть симплексной таблицы.

Вместо переменной x_7 в план 1 войдет переменная x_2

После преобразований получаем новую таблицу:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	2,17	-0,17	0	1	0	0	0,17	-0,17
x_4	22,83	5,17	0	0	1	0	0,83	-0,83
x_5	3,83	0,17	0	0	0	1	-0,17	0,17
x_2	0,83	-0,83	1	0	0	0	-0,17	0,17
F(X1)	1,67	-7,67	0	0	0	0	-0,33	0,33+M

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

В индексной строке F(x) выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_1, так как это наибольший коэффициент по модулю.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i1}

и из них выберем наименьшее:

$$\min\left[-, \frac{22.83}{5.17}, \frac{3.83}{0.17}, -\right] = 4.42$$

Следовательно, 2-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (5.17) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	min
x_3	2,17	-0,17	0	1	0	0	0,17	-0,17	-
x_4	22,83	**5,17**	0	0	1	0	0,83	-0,83	**4,42**
x_5	3,83	0,17	0	0	0	1	-0,17	0,17	23

x_2	0,83	-0,83	1	0	0	0	-0,17	0,17	-
F(X2)	1,67	**-7,67**	0	0	0	0	-0,33	0,33+M	0

Формируем следующую часть симплексной таблицы.

Вместо переменной x_4 в план 2 войдет переменная x_1

После преобразований получаем новую таблицу:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	2,9	0	0	1	0,0323	0	0,19	-0,19
x_1	4,42	1	0	0	0,19	0	0,16	-0,16
x_5	3,1	0	0	0	-0,0323	1	-0,19	0,19
x_2	4,52	0	1	0	0,16	0	-0,0323	0,0323
F(X2)	35,55	0	0	0	1,48	0	0,9	-0,9+M

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.

Оптимальный план можно записать так:

$x_1 = 4.42$

$x_2 = 4.52$

$F(X) = 6 \bullet 4.42 + 2 \bullet 4.52 = 35{,}548$

Возвращаясь к первоначальной задаче:

$x_1 = 4{,}42$ – выпуск 1 товара

$x_2 = 4{,}52$ – выпуск 2 товара

Прибыль = 35,548

Уровень социальной значимости = 5.