Векторная оптимизация, пример решения графическим методом

ЗАДАНИЕ.

Дана задача векторной оптимизации:

$$z_1 = -5x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$z_2 = -3x_1 + x_2 \to \max$$
$$z_3 = 3x_1 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 18 \\ 1 \le x_1 \le 10 \\ 1 \le x_2 \le 9 \end{cases}$$

Требуется определить переговорное множество, а затем решить данную задачу методом последовательных уступок (допустимые уступки по первым двум критериям принять равными $\delta_1 = 3$ и $\delta_2 = 2$).

РЕШЕНИЕ.

Очевидно, в данной задаче переговорное множество совпадает с областью допустимых решений (т.е. точек, удовлетворяющих системе уравнений), они соответствуют пятиугольнику ABCDE на рис.1 (а). Действительно, возьмём любую точку множества допустимых решений. Если мы от неё сдвинемся вправо, то значения критериев z_2 и z_3 увеличатся, но значение критерия z_1 уменьшится. Если мы сдвинемся левее, то значения критериев z_2 и z_3 уменьшатся, но значение критерия z_1 увеличится. Если мы сдвинемся ниже, то значения критериев z_1 и z_2 увеличатся, но значение критерия z_3 уменьшится. Если мы сдвинемся выше, то значения критериев z_1 и z_2 уменьшаться, но значение критерия z_3 увеличится. Таким образом, ни одна из точек множества допустимых решений не доминируется другими, т.е. все допустимые точки оптимальны по Парето.

Максимизируем функцию z_1 при условиях заданных неравенств. Это легко сделать графически (рис.1, а). Получаем:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad z_1^* = z_1^{\max} = z(A) = 13.$$

Переходим к максимизации функции z_2 при условиях заданных неравенств и дополнительном ограничении, позволяющем учесть, что по критерию z_1 нельзя уступать более, чем на δ_1. Так как $z_1^* - \delta_1 = 13 - 3 = 10$, то дополнительное ограничение будет иметь вид

$$-5x_1+2x_2\ge 10 \qquad (1)$$

Задачу $z_2=-3x_1+x_2\to\max$,

$\begin{cases} x_1+x_2\le 18 \\ 1\le x_1\le 10 \\ 1\le x_2\le 9 \\ -5x_1+2x_2\ge 10 \end{cases}$ решим графически.

$x^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}=6$, $z_2^{\max}=z_2^*=z_2(A)=6$.

Теперь уступаем по критерию z_2 на δ_2 $z_2^*-\delta_2=6-2=4$ и получаем второе дополнительное ограничение: $-3x_1+x_2\ge 4$.

Максимизируем z_3:

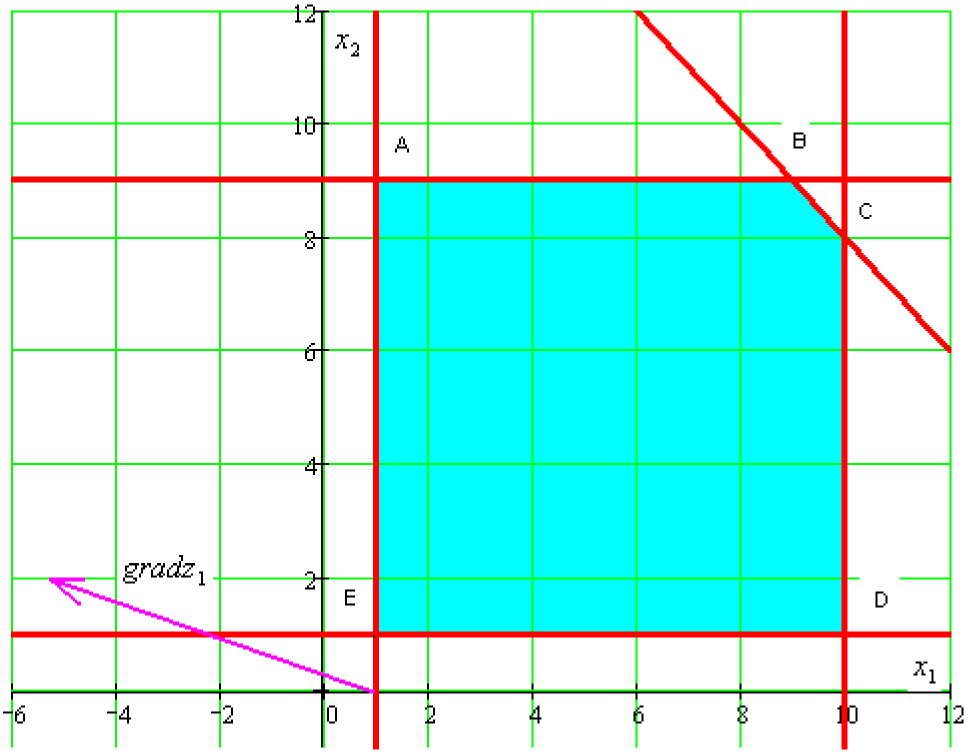
$z_3=3x_1\to\max$

$\begin{cases} x_1+x_2\le 18 \\ 1\le x_1\le 10 \\ 1\le x_2\le 9 \\ -5x_1+2x_2\ge 10 \\ -3x_1+x_2\ge 4 \end{cases}$

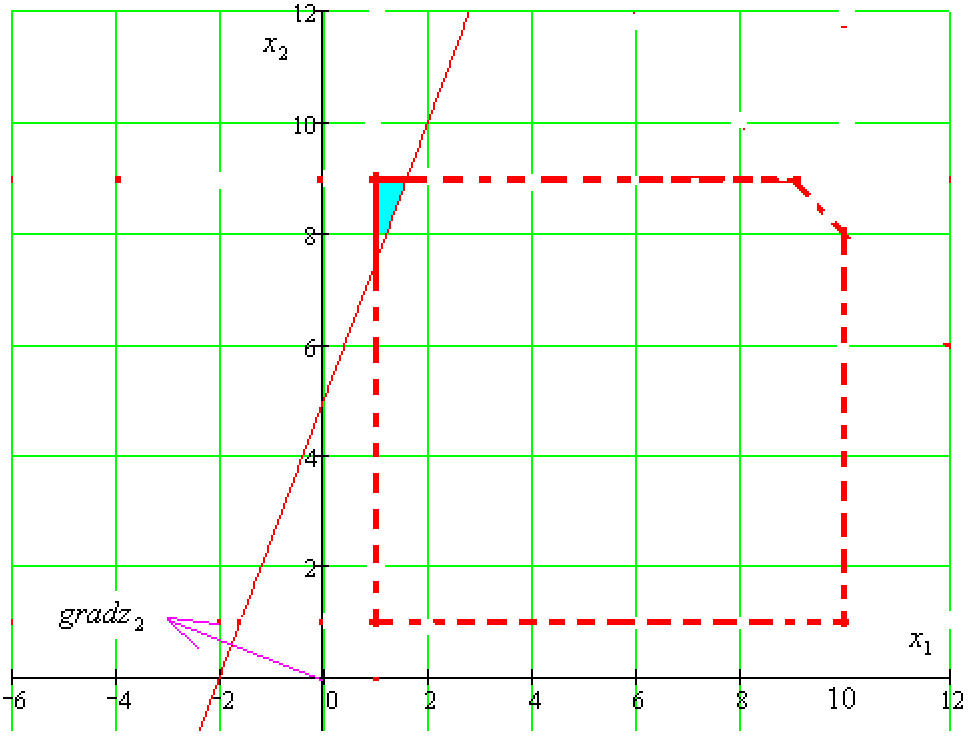
Получаем оптимальное решение трёхкритериальной задачи:

$$x^{(3)}=\begin{pmatrix}8/5\\9\end{pmatrix},\quad z_3^*=z_3^{\max}=\frac{8}{5}\cdot 3+9\cdot 0=\frac{24}{5}.$$

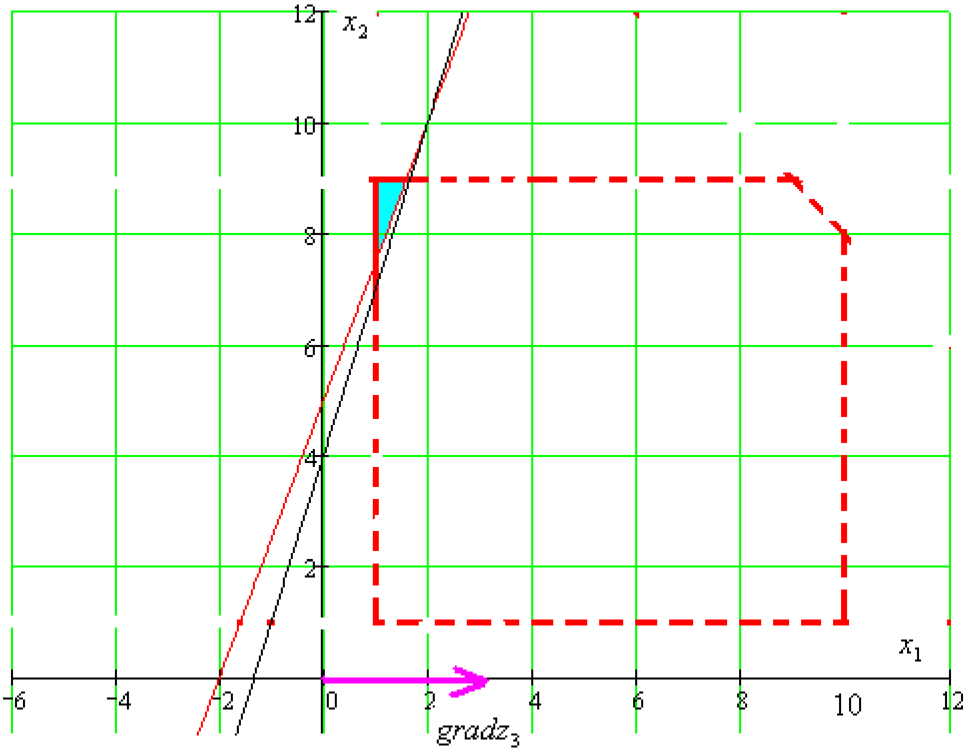
При этом $z_1=13, z_2=6, z_3=\frac{24}{5}$...


12
10
8
6
4
2
x_2
A
B
C
D
E
$gradz_1$
x_1
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12

а)


12
10
8
6
4
2
x_2
$gradz_2$
x_1
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12

б)



в)

Рис.1 – Графическое решение задачи векторной оптимизации