Методы оптимизации
Решение задачи выпуклого программирования

ЗАДАНИЕ. Решить задачу выпуклого программирования, используя теорему Куна-Таккера:

$$\begin{cases} 2x - x^2 + y \to \max \\ x^2 + y^2 \le 16 \\ 3x + 2y \le 1 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

Составляем функцию Лагранжа.

$$F(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 2x - x^2 + y + \lambda_1\left(16 - x^2 - y^2\right) + \lambda_2\left(1 - 3x - 2y\right)$$

Находим частные производные данной функции.

$$\begin{cases} \dfrac{dF(x, y, \lambda_1, \lambda_2)}{dx} = 2 - 2x - 2x\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ \dfrac{dF(x, y, \lambda_1, \lambda_2)}{dy} = 1 - 2y\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ \dfrac{dF(x, y, \lambda_1, \lambda_2)}{d\lambda_1} = 16 - x^2 - y^2 \\ \dfrac{dF(x, y, \lambda_1, \lambda_2)}{d\lambda_2} = 1 - 3x - 2y \end{cases}$$

Согласно теореме Куна-Таккера:

$$\begin{cases} x\dfrac{dF(x, y, \lambda_1, \lambda_2)}{dx} = 0 \\ y\dfrac{dF(x, y, \lambda_1, \lambda_2)}{dy} = 0 \\ \lambda_1\dfrac{dF(x, y, \lambda_1, \lambda_2)}{d\lambda_1} = 0 \\ \lambda_2\dfrac{dF(x, y, \lambda_1, \lambda_2)}{d\lambda_2} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x\left(2 - 2x - 2x\lambda_1 - 3\lambda_2\right) = 0 \\ y\left(1 - 2y\lambda_1 - 2\lambda_2\right) = 0 \\ \lambda_1\left(16 - x^2 - y^2\right) = 0 \\ \lambda_2\left(1 - 3x - 2y\right) = 0 \end{cases}$$

Рассматриваем варианты:

1. $x=0, y\neq 0$

$$\begin{cases} 1-2y\lambda_1-2\lambda_2=0 \\ \lambda_1\left(16-y^2\right)=0 \\ \lambda_2\left(1-2y\right)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \\ \lambda_1=0{,}125 \\ \lambda_2=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=0 \\ y=0{,}5 \\ \lambda_1=0 \\ \lambda_2=0{,}5 \end{cases}$$

2. $x\neq 0, y=0$

$$\begin{cases} 2-2x-2x\lambda_1-3\lambda_2=0 \\ \lambda_1\left(16-x^2\right)=0 \\ \lambda_2\left(1-3x\right)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ \lambda_1=0 \\ \lambda_2=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=1/3 \\ y=0 \\ \lambda_1=0 \\ \lambda_2=4/9 \end{cases}$$

3. $x\neq 0, y\neq 0$

$$\begin{cases} 2-2x-2x\lambda_1-3\lambda_2=0 \\ 1-2y\lambda_1-2\lambda_2=0 \\ \lambda_1\left(16-x^2-y^2\right)=0 \\ \lambda_2\left(1-3x-2y\right)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0{,}25 \\ y=0{,}125 \\ \lambda_1=0 \\ \lambda_2=0{,}5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=0{,}886 \\ y=3{,}9 \\ \lambda_1=0{,}128 \\ \lambda_2=0 \end{cases}$$

4. $x=0, y=0$

$$\begin{cases} \lambda_1\left(16\right)=0 \\ \lambda_2\left(1\right)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ \lambda_1=0 \\ \lambda_2=0 \end{cases}$$

Получаем 6 точек (не считая нулевой). Проверяем их на экстремальность.

Матрица Гессе:

$$f = 2x - x^2 + y$$

$$\frac{df}{dx} = 2 - 2x$$

$$\frac{df}{dy} = 1$$

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{d^2 f}{dx^2} & \dfrac{d^2 f}{dxdy} \\ \dfrac{d^2 f}{dydx} & \dfrac{d^2 f}{dy^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Первый определитель равен -2, второй = 0, матрица не определена, поэтому нельзя ничего сказать об экстремальности точек.

Найдем значения функции и ограничений во всех точках:

$$\begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 4 \end{pmatrix} \begin{cases} f(x, y) = 4 \\ x^2 + y^2 = 16 - \textit{подходит} \\ 3x + 2y = 8 - \textit{не подходит} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0,5 \end{pmatrix} \begin{cases} f(x, y) = 0,5 \\ x^2 + y^2 = 0,25 - \textit{подходит} \\ 3x + 2y = 1 - \textit{подходит} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 0 \end{pmatrix} \begin{cases} f(x, y) = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 - \textit{подходит} \\ 3x + 2y = 3 - \textit{не подходит} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x = 1/3 \\ y = 0 \end{pmatrix} \begin{cases} f(x, y) = 0,5556 \\ x^2 + y^2 = 0,1111 - \textit{подходит} \\ 3x + 2y = 1 - \textit{подходит} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x = 0,25 \\ y = 0,125 \end{pmatrix} \begin{cases} f(x, y) = 0,5625 \\ x^2 + y^2 = 0,078125 - \textit{подходит} \\ 3x + 2y = 1 - \textit{подходит} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x = 0,886 \\ y = 3,9 \end{pmatrix} \begin{cases} f(x, y) = 4,887 \\ x^2 + y^2 = 16 - \textit{подходит} \\ 3x + 2y = 10,46 - \textit{не подходит} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{pmatrix} \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 - \textit{подходит} \\ 3x + 2y = 0 - \textit{подходит} \end{cases}$$

Максимум достигается в точке

$$\begin{pmatrix} x = 0,25 \\ y = 0,125 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f_{max}(x, y) = 0,5625 \\ x^2 + y^2 = 0,078125 \le 16 \\ 3x + 2y = 1 \le 1 \end{cases}$$