Тема: Метод наибольшего правдоподобия

ЗАДАНИЕ. *Найти методом наибольшего правдоподобия оценку параметра* p *биномиального распределения* $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, *если в* n_1 *независимых испытаниях событие* A *появилось* m_1 *раз и в* n_2 *независимых испытаниях событие* A *появилось* m_2 *раз.*

РЕШЕНИЕ. Составим функцию правдоподобия:

$$L = P_{n_1}(m_1) \cdot P_{n_2}(m_2) = C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot p^{m_1+m_2} \cdot (1-p)^{\left[(n_1+n_2)-(m_1+m_2)\right]}$$

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L = \ln\left(C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2}\right) + (m_1+m_2) \cdot \ln p + \left((n_1+n_2)-(m_1+m_2)\right) \cdot \ln(1-p)$$

Вычислим первую производную по p:

$$\frac{d \ln L}{dp} = \frac{m_1+m_2}{p} - \frac{(n_1+n_2)-(m_1+m_2)}{1-p}.$$

Запишем уравнение правдоподобия, для чего приравняем найденную производную нулю:

$$\frac{m_1+m_2}{p} - \frac{(n_1+n_2)-(m_1+m_2)}{1-p} = 0$$

Решаем полученное уравнение относительно и находим критическую точку: $p = \dfrac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$.

В этой точке вторая производная отрицательна, значит, это точка максимума и, значит, ее надо принять в качестве оценки по методу наибольшего правдоподобия неизвестной вероятности p биномиального распределения.

Ответ: $p^* = \dfrac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$.