Тема: Метод наибольшего правдоподобия

ЗАДАНИЕ. *Используя метод наибольшего правдоподобия, оценить параметры a и* σ^2 *нормального распределения, если в результате n независимых испытаний случайная величина* ξ *приняла значения* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

РЕШЕНИЕ. Пусть случайная величина $\xi \in N(a, \sigma)$, $\theta = (a, \sigma)$ - оцениваемые параметры распределения.

Составим функцию правдоподобия:

$$L(a, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} p(\xi_i, a, \sigma) = \frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\xi_i - a)^2}{\sigma^2}\right),$$

Тогда $\ln L(a, \sigma) = -n\ln\sigma - n\ln\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - a)^2$.

Условия экстремума:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - a) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - a)^2 = 0.$$

Получили систему:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(\xi_i - a) = 0, \\ \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - a)^2 = n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\xi_i = na \\ \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - a)^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i. \\ \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - a)^2. \end{cases}$$

Корни этой системы уравнений: $\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \overline{\xi}$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - \overline{\xi}\right)^2 = S^2$.

Таким образом, в качестве оценки получаем: для среднего a нормального закона - выборочное среднее, а для дисперсии σ^2 - выборочную дисперсию S^2.