Нелинейное программирование
Решение задачи методом Куна-Таккера

ЗАДАНИЕ. Решить задачу нелинейного программирования.

$$\min\ f = x_1^2 + 2x_2^2 - 16x_1 - 20x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

Проверим на выпуклость.

Находим коэффициенты при:

$$d_{11}x_1^2 + d_{12}x_1x_2 + d_{22}x_2^2$$

$$d_{11} = 1$$

$$d_{12} = d_{21} = 0$$

$$d_{22} = 2$$

$$q_{11} = 2d_{11} = 2$$

$$q_{12} = d_{12} + d_{21} = 0$$

$$q_{21} = d_{21} + d_{12} = 0$$

$$q_{22} = 2d_{22} = 4$$

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Главные миноры Δ_1=2 и Δ_2=8 больше 0.

Значит квадратичная форма определена положительно, и строго выпукла вниз.

Решаем задачу методом Куна-Таккера.

Строим функцию Лагранжа.

$$L = x_1^2 + 2x_2^2 - 16x_1 - 20x_2 + \lambda_1(40 - 2x_1 - 5x_2) + \lambda_2(16 - 2x_1 - x_2)$$

Запишем условия Куна-Таккера для данной задачи

$$\frac{dL}{dx_1} = 2x_1 - 16 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \le 0$$

$$x_1\left(2x_1 - 16 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2\right) = 0$$

$$\frac{dL}{dx_2} = 4x_2 - 20 - 5\lambda_1 - \lambda_2 \le 0$$

$$x_2\left(4x_2 - 20 - 5\lambda_1 - \lambda_2\right) = 0$$

$$\frac{dL}{d\lambda_1} = 40 - 2x_1 - 5x_2 \ge 0$$

$$\lambda_1\left(40 - 2x_1 - 5x_2\right) = 0$$

$$\frac{dL}{d\lambda_2} = 16 - 2x_1 - x_2 \ge 0$$

$$\lambda_2\left(16 - 2x_1 - x_2\right) = 0$$

Перепишем систему линейных неравенств в виде

$$\begin{cases} 2x_1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \le 16 \\ 4x_2 - 5\lambda_1 - \lambda_2 \le 20 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \end{cases}$$

Введем дополнительные неотрицательные переменные

$$\begin{cases} 2x_1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + u_1 = 16 \\ 4x_2 - 5\lambda_1 - \lambda_2 + u_2 = 20 \\ 2x_1 + 5x_2 + v_1 = 40 \\ 2x_1 + x_2 + v_2 = 16 \end{cases}$$

при этом

$$\begin{cases} x_1 u_1 = 0 \\ x_2 u_2 = 0 \\ \lambda_1 v_1 = 0 \\ \lambda_2 v_2 = 0 \end{cases}$$

Решаем систему

базис	свободн	x1	x2	u1	u2	v1	v2	λ1	λ2	
	16	2	0	1	0	0	0	-2	-2	8
	20	0	1	0	1	0	0	-5	-1	
v1	40	2	5	0	0	1	0	0	0	20
v2	16	2	1	0	0	0	1	0	0	8
x1	8	1	0	0,5	0	0	0	-1	-1	
	20	0	1	0	1	0	0	-5	-1	20
v1	24	0	5	-1	0	1	0	2	2	4,8
v2	0	0	1	-1	0	0	1	2	2	
x1	8	1	0	0,5	0	0	0	-1	-1	
	15,2	0	0	0,2	1	-0,2	0	-5,4	-1,4	
x2	4,8	0	1	-0,2	0	0,2	0	0,4	0,4	24
v2	-4,8	0	0	-0,8	0	-0,2	1	1,6	1,6	24
x1	8	1	0	0,5	0	0	0	-1	-1	
	20	0	0	1	1	0	-1	-7	-3	20
x2	0	0	1	-1	0	0	1	2	2	
v1	24	0	0	4	0	1	-5	-8	-8	
x1	8	1	0	0,5	0	0	0	-1	-1	
u2	20	0	0	1	1	0	-1	-7	-3	
x2	0	0	1	-1	0	0	1	2	2	
v1	24	0	0	4	0	1	-5	-8	-8	

Т.к. базис заполнен, и свободные члены ограничений положительны, то найдено решение системы уравнений, которое удовлетворяет условиям Куна-Таккера, а значит, является оптимальным для исходной задачи. Это решение имеет вид: $x_1 = 8$, $x_2 = 0$, $f_{min} = -64$.

Решаем задачу методом Била.

$$\min\ f = x_1^2 + 2x_2^2 - 16x_1 - 20x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

вводим дополнительные переменные

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 40 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Базис: $(x_3 \quad x_4)$

Выражаем базисные через свободные:

$$\begin{cases} x_3 = 40 - 2x_1 - 5x_2 \\ x_4 = 16 - 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

Первое решение:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 = 40 \\ x_4 = 16 \end{cases}$$

Проверяем на оптимальность:

$$\frac{df}{dx_1} = 2x_1 - 16 = 2 \cdot 0 - 16 = -16$$

$$\frac{df}{dx_2} = 4x_2 - 20 = 4 \cdot 0 - 20 = -20$$

За счет обоих свободных переменных функцию можно уменьшить.

Выводим x_1.

Определим предел возрастания переменной x_1

Для этого найдем, при каких значениях переменной $x1$ базисные переменные и производная станут нулевыми.

$$\begin{cases} \\ x_3 = 0 \rightarrow x_1 = 20 \\ x_4 = 0 \rightarrow x_1 = 8 \\ \dfrac{df}{dx_1} = 0 \rightarrow x_1 = 8 \end{cases}$$

Таким образом, при увеличении переменной x_2 первой в ноль обращается производная (второй случай), впрочем и переменная x_4.

Введем дополнительную неограниченную по знаку переменную.

$$u_1 = -\frac{df}{dx_1} = 16 - 2x_1$$

Изменяем исходную систему:

$$\begin{cases} x_1 = 8 - 0,5u_1 \\ x_3 = 24 - 5x_2 + u_1 \\ x_4 = 0 - x_2 + u_1 \end{cases}$$

Второе решение:

$$\begin{cases} x_2 = u_1 = 0 \\ x_1 = 8 \\ x_3 = 24 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Функция:

$$f = 2x_2^2 - 20x_2 + 0,25u_1^2 - 64$$

Проверяем на оптимальность:

$$\frac{df}{dx_2} = 4x_2 - 20 = 4 \cdot 0 - 20 = -20$$

$$\frac{df}{du_1} = 0,5u_1 = 0,5 \cdot 0 = 0$$

За счет x_2 функцию можно уменьшить.

Определим предел возрастания переменной x_2

Для этого найдем, при каких значениях переменной $x2$ базисные переменные и производная станут нулевыми.

$$\begin{cases} x_3 = 0 \to x_2 = 4,8 \\ x_4 = 0 \to x_2 = 0 \\ \dfrac{df}{dx_2} = 0 \to x_2 = 5 \end{cases}$$

Таким образом, при увеличении переменной x_2 первой в ноль обращается переменная x_4 (первый случай).

Изменяем исходную систему:

$$\begin{cases} x_1 = 8 - 0,5u_1 \\ x_3 = 24 + 5x_4 - 4u_1 \\ x_2 = -x_4 + u_1 \end{cases}$$

Третье решение:

$$\begin{cases} x_4 = u_1 = 0 \\ x_1 = 8 \\ x_3 = 24 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Функция:

$$f = 2x_4^2 + 20x_4 + 1,25u_1^2 - 20u_1 - 4u_1x_4 - 64$$

Проверяем на оптимальность:

$$\frac{df}{dx_4} = 4x_4 - 4u_1 + 20 = 20$$

$$\frac{df}{du_1} = 4,5u_1 - 4x_4 - 20 = -20$$

За счет u_1 функцию можно уменьшить.

Определим предел возрастания переменнбой u_1

Для этого найдем, при каких значениях переменной u_1 базисные переменные и производная станут нулевыми.

$$\begin{cases} \\ x_1 = 0 \rightarrow u_2 = 16 \\ x_3 = 0 \rightarrow u_2 = 6 \\ \dfrac{df}{dx_4} = 0 \rightarrow u_2 = 5 \end{cases}$$

Таким образом, при увеличении переменной u_1 первой в ноль обращается производная (второй случай).

Введем дополнительную неограниченную по знаку переменную.

$$u_2 = -\frac{df}{dx_4} = -\left(20 + 4x_4 - 4u_1\right)$$

Изменяем исходную систему:

Изменяем исходную систему:

$$\begin{cases} x_1 = 5,5 - 0,5x_4 - 0,125u_2 \\ x_3 = 4 + x_4 - u_2 \\ x_2 = 5 + 0,25u_2 \\ u_1 = 5 + x_4 + 0,125u_2 \end{cases}$$

Четвертое решение:

$$\begin{cases} x_4 = u_2 = 0 \\ x_1 = 5{,}5 \\ x_3 = 5 \\ x_2 = 5 \\ u_1 = 5 \end{cases}$$

Функция:

$$f = \frac{1}{4}x_4^2 + \frac{5}{2}x_4 + \frac{9}{64}u_2^2 + \frac{5}{8}u_2 + \frac{1}{8}u_2 x_4 - \frac{431}{4}$$

Проверяем на оптимальность:

$$\frac{df}{dx_4} = 0{,}5x_4 + 0{,}125u_2 + 2{,}5 = 2{,}5$$

$$\frac{df}{du_2} = \frac{9}{32}u_2 + \frac{1}{8}x_4 + \frac{5}{8} = \frac{5}{8}$$

Функцию уменьшить нельзя, найдено оптимальное решение:

$$\begin{cases} x_4 = u_2 = 0 \\ x_1 = 5{,}5 \\ x_3 = 5 \\ x_2 = 5 \\ u_1 = 5 \end{cases}$$

$$f_{\min} = -\frac{431}{4}$$