

Пример решения задачи

Двумерная дискретная случайная величина

Задача. В продукции завода брак вследствие дефекта A составляет 10%, а вследствие дефекта B - 20%. Годная продукция составляет 75%. Пусть X - индикатор дефекта A , а Y - индикатор дефекта B . Составить матрицу распределения двумерной случайной величины (X, Y) . Найти одномерные ряды распределений составляющих X и Y и исследовать их зависимость.

Решение. Найдем недостающие вероятности, чтобы заполнить таблицу распределения двумерной случайной величины (X, Y) .

Введем события:

A = (Изделие с дефектом A),

B = (Изделие с дефектом B).

По условию даны вероятности $P(A) = 0,1$, $P(B) = 0,2$. Также дана вероятность того, что всего годной продукции (без дефектов любого вида) 75% процентов, то есть $P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = 0,75$, то есть $P(A + B) = 0,25$ (вероятность, что продукция с каким-либо дефектом). Тогда можно найти вероятность того, что изделие содержит оба вида дефектов одновременно:

$$P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A + B) = 0,1 + 0,2 - 0,25 = 0,05.$$

Событие B можно представить как сумму несовместных событий $B = A \cdot B + \bar{A} \cdot B$, откуда $P(\bar{A} \cdot B) = P(B) - P(A \cdot B) = 0,2 - 0,05 = 0,15$.

Аналогично для события A : $A = A \cdot B + A \cdot \bar{B}$,

откуда $P(A \cdot \bar{B}) = P(A) - P(A \cdot B) = 0,1 - 0,05 = 0,05$.

Итак,

$$P(X = 0, Y = 0) = P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = 0,75,$$

$$P(X = 1, Y = 0) = P(A \cdot \bar{B}) = 0,05$$

$$P(X = 0, Y = 1) = P(\bar{A} \cdot B) = 0,15$$

$$P(X = 1, Y = 1) = P(A \cdot B) = 0,05.$$

Получаем таблицу:

$X \setminus Y$	0	1
0	0,75	0,15
1	0,05	0,05

Сумма вероятностей в клетках таблицы равна 1, расчеты произведены верно.

Найдем одномерные ряды распределений для X и Y (складывая вероятности по строкам и столбцам):

x_i	0	1
p_i	0,9	0,1

y_i	0	1
p_i	0,8	0,2

Чтобы исследовать зависимость между X и Y , вычислим корреляционный момент

$$\mu_{xy} = M(XY) - MX \cdot MY.$$

Вычислим математические ожидания:

$$MX = 0 \cdot 0,9 + 1 \cdot 0,1 = 0,1, \quad MY = 0 \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,2 = 0,2,$$

$$M(XY) = 0 \cdot 0,75 + 0 \cdot 0,15 + 0 \cdot 0,05 + 1 \cdot 0,05 = 0,05,$$

Тогда $\mu_{xy} = M(XY) - MX \cdot MY = 0,05 - 0,1 \cdot 0,2 = 0,05 - 0,02 = 0,03 \neq 0$, величины X и Y зависимы.