Пример решения задачи

Двумерная дискретная случайная величина

Задача. Два баскетболиста по два раза бросают мяч в корзину. При каждом броске вероятность попадания для первого баскетболиста 0,6, для второго – 0,7. Случайная величина X – число попаданий первым баскетболистом по кольцу. Случайная величина Y – суммарное число попаданий обоими баскетболистами. Построить таблицу распределения случайного вектора (X,Y). Найти характеристики вектора (X,Y). Зависимы или независимы случайные величины X и Y.

Решение. Составим вспомогательную таблицу всех возможных комбинаций попаданий при бросках данных баскетболистов. Предварительно вычислим необходимые вероятности по формуле Бернулли.

Первый баскетболист, вероятность попадания $p=0,6$.

0 попаданий: $0,4\cdot 0,4=0,16$

1 попадание: $0,4\cdot 0,6+0,6\cdot 0,4=0,48$

2 попадания: $0,6\cdot 0,6=0,36$

Второй баскетболист, вероятность попадания $p=0,7$.

0 попаданий: $0,3\cdot 0,3=0,09$

1 попадание: $0,3\cdot 0,7+0,7\cdot 0,3=0,42$

2 попадания: $0,7\cdot 0,7=0,49$

Таблица:

Попаданий		Вероятности		Всего попаданий	Вероятность
1 баск.	2 баск.	1 баск.	2 баск.		
0	0	0,16	0,09	0	0,0144
1	0	0,48	0,09	1	0,0432
2	0	0,36	0,09	2	0,0324
0	1	0,16	0,42	1	0,0672
1	1	0,48	0,42	2	0,2016

2	1	0,36	0,42	3	0,1512
0	2	0,16	0,49	2	0,0784
1	2	0,48	0,49	3	0,2352
2	2	0,36	0,49	4	0,1764

Случайная величина X – число попаданий первым баскетболистом по кольцу, принимает значения 0, 1 и 2. Случайная величина Y – суммарное число попаданий обоими баскетболистами, принимает значения 0, 1, 2, 3 и 4. Построим таблицу распределения случайного вектора (X,Y), используя таблицу, приведенную выше.

X\Y	0	1	2	3	4	p_X
0	0,0144	0,0672	0,0784	0	0	0,16
1	0	0,0432	0,2016	0,2352	0	0,48
2	0	0	0,0324	0,1512	0,1764	0,36
p_Y	0,0144	0,1104	0,3124	0,3864	0,1764	

Найдем характеристики вектора (X,Y) - математические ожидания, дисперсии, ковариацию.

Закон распределения X :

x_i	0	1	2
p_i	0,16	0,48	0,36

Характеристики:

$$M(X)=\sum x_i \cdot p_i = 1,2.$$

$$D(X)=\sum x_i^2 \cdot p_i - (M(X))^2 = 1,92 - 1,2^2 = 0,48.$$

x_i	0	1	2	**Сумма**
p_i	0,16	0,48	0,36	**1**

$x_i p_i$	0	0,48	0,72	**1,2**
$x_i^2 p_i$	0	0,48	1,44	**1,92**

Закон распределения Y:

y_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0144	0,1104	0,3124	0,3864	0,1764

Характеристики:

$$M(Y)=\sum y_i \cdot p_i = 2,6$$

$$D(Y)=\sum y_i^2 \cdot p_i - (M(Y))^2 = 7,66-2,6^2 = 0,9.$$

y_i	0	1	2	3	4	**Сумма**
p_i	0,0144	0,1104	0,3124	0,3864	0,1764	**1**
$y_i p_i$	0	0,1104	0,6248	1,1592	0,7056	**2,6**
$y_i^2 p_i$	0	0,1104	1,2496	3,4776	2,8224	**7,66**

$$M(XY)=\sum x_i y_j p_{ij} = 3,6$$

X\Y	0	1	2	3	4	$y_j p_{ij}$	$x_i y_j p_{ij}$
0	0,0144	0,0672	0,0784	0	0	0,224	0
1	0	0,0432	0,2016	0,2352	0	1,152	1,152
2	0	0	0,0324	0,1512	0,1764	1,224	2,448
						Сумма	**3,6**

Ковариация: $\operatorname{cov}(X,Y)=M(XY)-M(X)M(Y)=3,6-2,6\cdot 1,2=0,48$.

Коэффициент корреляции: $r_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}=\dfrac{0,48}{\sqrt{0,48\cdot 0,9}}=0,73.$

Случайные величины X и Y зависимы, так как, например,
$P\left(X=0,Y=0\right)=0,0144\neq 0,0144\cdot 0,16=P\left(X=0\right)\cdot P\left(Y=0\right)$.