

### Дискретный случайный вектор: решение задачи

**Задача.** Бросаются две одинаковые игральные кости. Случайная величина  $X$  равна 1, если сумма выпавших чисел четна, и равна 0 в противном случае. Случайная величина  $Y$  равна 1, если произведение выпавших чисел четно, и 0 в противном случае. Описать закон распределения случайного вектора  $(X, Y)$ . Найти  $D[X]$ ,  $D[Y]$  и  $Cov[X, Y]$ .

**Решение.** Учитываем, что выпадение любого числа очков на кости равно  $\frac{1}{6}$  и выпадения на двух костях независимы, то есть каждая комбинация вида  $(x, y)$  выпадает с вероятностью  $\frac{1}{36}$  ( $x$  - число очков на первой кости,  $y$  - число очков на второй кости).

Запишем таблицы сумм и произведений числа очков, выделим четные комбинации.

сумма	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

произведение	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Случайная величина  $X$  равна 1, если сумма выпавших чисел четна, и равна 0 в противном случае. В половине случаев сумма четная, поэтому  $P(X = 1) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ ,  $P(X = 0) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ .

Случайная величина  $Y$  равна 1, если произведение выпавших чисел четно, и 0 в противном случае. Получаем  $P(Y = 0) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ ,  $P(Y = 1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ .

Опишем закон распределения вектора  $(X, Y)$ .

$P(X = 0, Y = 0) = 0$  (произведение и сумма нечетные).

$P(X = 1, Y = 0) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$  (сумма четная, произведение нечетное).

$$P(X=0, Y=1) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \text{ (сумма нечетная, произведение четное).}$$

$$P(X=1, Y=1) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \text{ (сумма четная, произведение четное).}$$

Получили закон:

$X \backslash Y$	0	1
0	0	1/2
1	1/4	1/4

Найдем  $D[X]$ ,  $D[Y]$ .

$$M[X] = \sum x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 = 0,5.$$

$$D[X] = \sum x_i^2 \cdot p_i - (M[X])^2 = 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 - 0,5^2 = 0,25$$

Аналогично:

$$M[Y] = \sum y_i \cdot p_i = 0 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,75 = 0,75.$$

$$D[Y] = \sum y_i^2 \cdot p_i - (M[Y])^2 = 0 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,75 - 0,75^2 = 0,1875$$

Найдем  $Cov[X, Y]$ . Вычислим

$$M[XY] = \sum x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} = 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1/2 + 1 \cdot 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1 \cdot 1/4 = 0,25.$$

Тогда  $Cov[X, Y] = M[XY] - M[X]M[Y] = 0,25 - 0,5 \cdot 0,75 = -0,125.$