

Дискретная случайная величина

Пример решения задачи

Задача. Дан ряд распределения дискретной с.в. X . Найти числовые характеристики положения и рассеивания с.в. X . Найти м.о. и дисперсию с.в. $Y=X/2-2$, не записывая ряда распределения с.в. Y , проверить результат с помощью производящей функции. Построить функцию распределения с.в. X .

$\{x_i\}$ 8 | 12 | 18 | 24 | 30 |
 $\{p_i\}$ 0,3 | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

Решение.

Числовые характеристики положения.

Математическое ожидание: $M(X) = \sum x_i p_i = 16,8$.

Мода (наиболее вероятное значение): $Mo = 8$ и $Mo = 18$.

Медиана (значение в середине ряда): $Me = 18$.

Числовые характеристики рассеивания.

Дисперсия: $D(X) = \sum (x_i)^2 p_i - (M(X))^2 = 336 - 16,8^2 = 53,76$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{53,76} \approx 7,332$.

Коэффициент вариации: $V = \frac{\sigma}{M(X)} \cdot 100\% = \frac{7,332}{16,8} \cdot 100\% \approx 43,64\%$.

Расчеты в таблице ниже:

x_i	8	12	18	24	30	Сумма
p_i	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1	1
$x_i p_i$	2,4	1,2	5,4	4,8	3	16,8
$x_i^2 p_i$	19,2	14,4	97,2	115,2	90	336

Найдем математическое ожидание и дисперсию с.в. $Y = \frac{X}{2} - 2$, не записывая ряда распределения с.в. Y по формулам для математического ожидания и дисперсии.

$$M(Y) = M\left(\frac{X}{2} - 2\right) = M\left(\frac{X}{2}\right) - 2 = \frac{1}{2}M(X) - 2 = \frac{1}{2}16,8 - 2 = 6,4.$$

$$D(Y) = D\left(\frac{X}{2} - 2\right) = D\left(\frac{X}{2}\right) - 0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 D(X) = \frac{1}{4}53,76 = 13,44.$$

Проверим результат с помощью производящей функции.

Построим производящую функцию

$$\begin{aligned}\varphi_y(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} p(Y = y_k) z^{y_k} = \sum_{k=0}^{\infty} p(Y = y_k = x_k / 2 - 2) z^{x_k / 2 - 2} = \\ &= 0,3z^{8/2-2} + 0,1z^{12/2-2} + 0,3z^{18/2-2} + 0,2z^{24/2-2} + 0,1z^{30/2-2} = \\ &= 0,3z^2 + 0,1z^4 + 0,3z^7 + 0,2z^{10} + 0,1z^{13}.\end{aligned}$$

Вычислим первую и вторую производные:

$$\begin{aligned}(\varphi_y(z))' &= (0,3z^2 + 0,1z^4 + 0,3z^7 + 0,2z^{10} + 0,1z^{13})' = \\ &= 0,6z + 0,4z^3 + 2,1z^6 + 2z^9 + 1,3z^{12}. \\ (\varphi_y(z))'' &= (0,6z + 0,4z^3 + 2,1z^6 + 2z^9 + 1,3z^{12})' = \\ &= 0,6 + 1,2z^2 + 12,6z^5 + 18z^8 + 15,6z^{11}.\end{aligned}$$

Математическое ожидание:

$$M(Y) = \varphi'(1) = 0,6 + 0,4 + 2,1 + 2 + 1,3 = 6,4$$

Дисперсия:

$$D(Y) = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2 = 0,6 + 1,2 + 12,6 + 18 + 15,6 + 6,4 - 6,4^2 = 13,44.$$

Результаты совпали.

Найдем функцию распределения по определению: $F(x) = P(X < x)$:

$$\begin{aligned}\text{при } x \leq 8 \quad &F(x) = 0, \\ \text{при } 8 < x \leq 12 \quad &F(x) = 0 + 0,3 = 0,3, \\ \text{при } 12 < x \leq 18 \quad &F(x) = 0,3 + 0,1 = 0,4, \\ \text{при } 18 < x \leq 24 \quad &F(x) = 0,4 + 0,3 = 0,7, \\ \text{при } 24 < x \leq 30 \quad &F(x) = 0,7 + 0,2 = 0,9, \\ \text{при } x > 30 \quad &F(x) = 0,9 + 0,1 = 1.\end{aligned}$$

Строим график этой функции:

