

Дискретная случайная величина

Пример решения задачи

Задача. Задан закон распределения дискретной случайной величины X (в первой строке указаны возможные значения x_i , во второй строке – вероятности возможных значений p_i).

Найти:

А) математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$;

Б) составить функцию распределения случайной величины $F(x)$ и построить ее график;

В) вычислить вероятности попадания случайной величины X в интервал $x_2 < X < x_4$, пользуясь составленной функцией распределения $F(x)$;

Г) составить закон распределения величины $Y = 100 - 2X$;

Д) вычислить математическое ожидание и дисперсию составленной случайной величины Y двумя способами, т.е. пользуясь свойством математического ожидания и дисперсии, а также непосредственно по закону распределения случайной величины $Y = 100 - 2X$.

x_i	10	20	30	40	50
p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

Решение.

А) Найдем математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Математическое ожидание:

$$M(X) = \sum_{i=1}^5 x_i p_i = 36.$$

Дисперсия:

$$D(X) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 p_i - (M(X))^2 = 1500 - 36^2 = 204.$$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{204} \approx 14,283$.

Расчеты в таблице ниже:

x_i	10	20	30	40	50	Сумма
p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4	1
$x_i p_i$	1	4	3	8	20	36
$x_i^2 p_i$	10	80	90	320	1000	1500

Б) Составим функцию распределения случайной величины $F(x)$ и построим ее график.

Найдем функцию распределения по определению: $F(x) = P(X < x)$:

при $x \leq 10$ $F(x) = 0$,

при $10 < x \leq 20$ $F(x) = 0 + 0,1 = 0,1$,

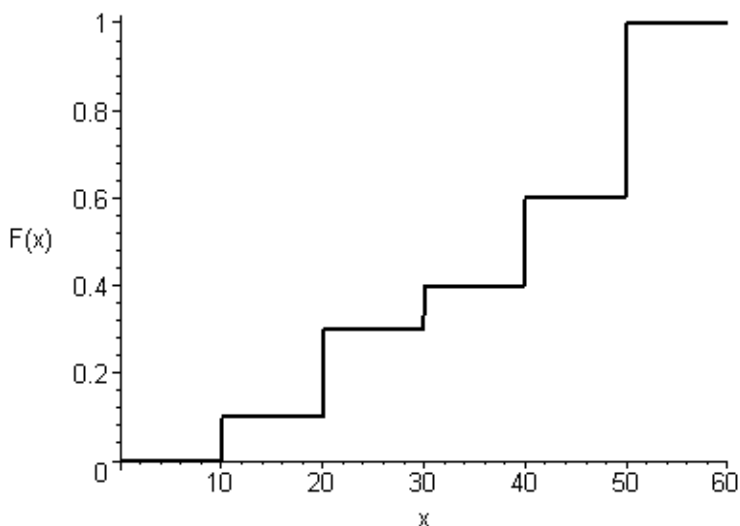
при $20 < x \leq 30$ $F(x) = 0,1 + 0,2 = 0,3$,

при $30 < x \leq 40$ $F(x) = 0,3 + 0,1 = 0,4$,

при $40 < x \leq 50$ $F(x) = 0,4 + 0,2 = 0,6$,

при $x > 50$ $F(x) = 0,6 + 0,4 = 1$.

Строим график этой функции:



В) Вычислим вероятности попадания случайной величины X в интервал $x_2 < X < x_4$, пользуясь составленной функцией распределения $F(x)$.

$P(20 < X < 40) = F(40) - F(20) = 0,4 - 0,1 = 0,3$. (это при $x_2 \leq X < x_4$. Если рассматривать строгое равенство, то будет $0,4 - 0,3 = 0,1$).

Г) Составим закон распределения величины $Y = 100 - 2X$:

$y_i = 100 - 2x_i$	80	60	40	20	0
P_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

Д) Вычислим математическое ожидание и дисперсию составленной случайной величины Y двумя способами, т.е. пользуясь свойством математического ожидания и дисперсии, а также непосредственно по закону распределения случайной величины $Y = 100 - 2X$.

1) по свойствам.

$$M(Y) = M(100 - 2X) = 100 - 2M(X) = 100 - 2 \cdot 36 = 28.$$

$$D(Y) = D(100 - 2X) = 0 + (-2)^2 D(X) = 4D(X) = 4 \cdot 204 = 816.$$

2) по закону $Y = 100 - 2X$.

$$M(Y) = \sum_{i=1}^5 y_i p_i = 28.$$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^5 y_i^2 p_i - (M(Y))^2 = 1600 - 28^2 = 816.$$

Расчеты в таблице.

y_i	80	60	40	20	0	Сумма
p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4	1
$y_i p_i$	8	12	4	4	0	28
$y_i^2 p_i$	640	720	160	80	0	1600

Результаты совпали.