Решение задачи: непрерывная случайная величина, закон Лапласа.

Задание. Случайная величина X подчинена закону Лапласа $p(x)=a\cdot e^{-\lambda|x|}$ ($\lambda>0$). Найти a, $M(x)$, $D(x)$ и $F(x)$. Построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

Решение. Найдем параметр a из условия нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)dx=1$. Получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty} a\cdot e^{-\lambda|x|}dx=\int\limits_{-\infty}^{0} a\cdot e^{\lambda x}dx+\int\limits_{0}^{\infty} a\cdot e^{-\lambda x}dx=\frac{a}{\lambda}e^{\lambda x}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{a}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{a}{\lambda}+\frac{a}{\lambda}=\frac{2a}{\lambda}=1,$$ откуда

$a=\frac{\lambda}{2}$. Тогда плотность распределения: $p(x)=\frac{\lambda}{2}\cdot e^{-\lambda|x|}$.

Найдем математическое ожидание:

$M(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx=\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot e^{-\lambda|x|}dx=0$ (как интеграл от нечетной функции по симметричному интервалу)

Найдем дисперсию:

$$D(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2p(x)dx-\left(M(x)\right)^2=\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot e^{-\lambda|x|}dx-0=\lambda\int\limits_{0}^{\infty} x^2\cdot e^{-\lambda x}dx=$$

Дважды интегрируем по частям.

$$=\begin{vmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=e^{-\lambda x}dx & v=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{vmatrix}=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty}+2\int\limits_{0}^{\infty} x\cdot e^{-\lambda x}dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=e^{-\lambda x}dx & v=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{vmatrix}=-\frac{2}{\lambda}xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty}+\frac{2}{\lambda}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}dx=-\frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{2}{\lambda^2}.$$

Найдем функцию распределения $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt$.

Пусть $x<0$, тогда .

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt=\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\lambda|t|}dt=\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{\lambda t}dt=\frac{1}{2}e^{\lambda t}\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{2}e^{\lambda x}.$$

Пусть $x>0$, тогда

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt=\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\lambda|t|}dt=\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\lambda t}dt+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{0}^{x} e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{2}e^{\lambda t}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{2}e^{-\lambda t}\Big|_{0}^{x}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\lambda x}+\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}e^{-\lambda x}.$$

То есть,

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\lambda x}, & x<0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-\lambda x}, & x>0.\end{cases}$$

Построим графики $p(x)$ и $F(x)$ при $\lambda=1$.