Примеры решений на нормальный закон распределения

Задача. Заданы функция плотности нормального распределения $f(x) = Ae^{-\frac{9(x-0,5)^2}{8}}$ и интервал $(0,3;1,9)$. Требуется:

1) найти математическое ожидание m
2) найти среднее квадратическое отклонение σ и дисперсию D
3) найти неизвестный коэффициент A
4) найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал
5) построить график функции плотности и на нём отметить площадь, равную найденной вероятности.

Решение. По виду плотности распределения

$$f(x) = Ae^{-\frac{9(x-0,5)^2}{8}} = Ae^{-\frac{(x-0,5)^2}{8/9}} = Ae^{-\frac{(x-0,5)^2}{2\cdot(2/3)^2}},$$

сопоставляя его с каноническим видом для нормально распределенной случайной величины:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Получаем, что математическое ожидание $a = m = 0,5 = 1/2$. Среднее квадратическое отклонение равно $\sigma = 2/3$, дисперсия $D = \sigma^2 = 4/9$.

Найдем неизвестный коэффициент $A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2/3\sqrt{2\pi}} = \frac{3}{2\sqrt{\pi}}$.

Получаем искомую плотность распределения: $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{9(x-0,5)^2}{8}}$.

Найдем вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $(0,3;1,9)$.

Используем формулу $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ - функция Лапласа (значения берутся из таблицы).

Получаем:

$$P(0,3 < X < 1,9) = \Phi\left(\frac{1,9-0,5}{2/3}\right) - \Phi\left(\frac{0,3-0,5}{2/3}\right) = \Phi(2,1) - \Phi(-0,3) =$$

$$= \Phi(2,1) + \Phi(0,3) = 0,4821 + 0,1179 = 0,6.$$

Построим график функции плотности и на нём отметим площадь, равную найденной вероятности (закрашенная область):