Примеры решений на нормальный закон распределения

Задача. Плотность распределения вероятностей нормальной случайной величины X имеет вид $f(x)=\gamma e^{-x^2+6x+3}$. Требуется найти:

А) неизвестный параметр γ,

Б) математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$,

В) вероятность попадания случайной величины X в интервал (3, 4),

Г) вероятность выполнения неравенства $|X-M[X]|<0,2$.

Решение.

А) Плотность распределения нормальной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Сравним с данным в условии выражением: $f(x)=\gamma e^{-x^2+6x+3}$, чтобы определить неизвестные параметры.

$$f(x)=\gamma e^{-x^2+6x+3}=\gamma e^{-\left(x^2-6x\right)+3}=\gamma e^{-\left(x^2-6x+9\right)+3+9}=\gamma e^{-(x-3)^2+12}=\gamma e^{12}e^{-(x-3)^2}.$$

Получаем, что $a=3$, $\sigma^2=1/2$. Тогда приходим к условию для определения γ:

$$\gamma e^{12}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}},$$

$$\gamma=\frac{e^{-12}}{\sqrt{\pi}}$$

Получаем окончательно выражение для плотности: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-3)^2}$.

Б) Математическое ожидание $M[X]=a=3$ и дисперсия $D[X]=\sigma^2=\frac{1}{2}$.

В) Найдем вероятность попадания случайной величины X в интервал (3, 4). Используем формулу $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$. Подставляем наши значения:

$$P(3<X<4)=\Phi\left(\frac{4-3}{1/\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{3-3}{1/\sqrt{2}}\right)=\Phi(1,41)-\Phi(0)=0,4207-0=0,4207.$$

Г) Найдем вероятность выполнения неравенства $\left|X-M\left[X\right]\right|<0,2$. Используем формулу:

$P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma)$. Подставляем:

$$P(|X-4|<0,2)=2\Phi\left(\frac{0,2}{1/\sqrt{2}}\right)=2\Phi\left(0,28\right)=2\cdot 0,1103=0,2206.$$