Примеры решений на нормальный закон распределения

Задача. Случайная величина X распределена по нормальному закону N[-1,2]. Вычислить

1) вероятность того, что $X\in[-6,1]$

2) вероятность того, что при пяти испытаниях три раза $X\in[M,M+D]$.

Решение.

Задано нормальное распределение: $N(a;\sigma)$.

Параметры нормального распределения: $a=M=-1$, $\sigma=2$.

Вероятность попадания нормально распределенной СВ на заданный промежуток вычислим по формуле: $P(\alpha\le x\le\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, ее значения берут из таблиц.

1) Если $X\in[-6;1]$, то $P(-6\le x\le 1)=\Phi\left(\frac{1+1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-6+1}{2}\right)=\Phi(1)-\Phi(-2{,}5)=\Phi(1)+\Phi(2{,}5)$

(т.к. функция Лапласа - нечетная).

По таблице: $\Phi(1)\approx 0{,}3413;\ \Phi(2{,}5)\approx 0{,}4938$.

Получаем: $P(-6\le x\le 1)=0{,}3413+0{,}4938=0{,}8351$.

2) Т.к. $X\in[M;M+D]$, $D=\sigma^2=4$, то надо найти вероятность $X\in[-1;3]$

$P(-1<x<3)=\Phi\left(\frac{3+1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-1+1}{2}\right)=\Phi(2)-\Phi(0)$.

По таблице: $\Phi(2)\approx 0{,}4773;\ \Phi(0)=0$.

$P(-1\le x\le 3)=0{,}4773-0=0{,}4773$.

Серия из пяти испытаний. Нас интересует, что событие появится ровно 3 раза. Имеем серию повторных независимых испытаний, поэтому вероятность события вычислим по формуле Бернулли: $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$, где m=3, n=5, $p=P(-1\le x\le 3)=0{,}4773$,

q=1-p=1-0,4773=0,5225.

Получаем после подстановки:

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}4773^3 \cdot 0{,}5225^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} \cdot 0{,}02969 = 10 \cdot 0{,}02969 = 0{,}2969.$$

Ответ. 0,8351; 0,4773; $P_5(3) = 0{,}2969$.