Задача по уравнению с математической физики с решением
Неоднородное волновое уравнение

ЗАДАНИЕ.

Решить методом разделения переменных следующую задачу для неоднородного волнового уравнения.

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+Ax+B,\ 0<x<l,\ t>0,$$
$$u(0,t)=U_1,\ u(l,t)=U_2,$$
$$u(x,0)=U_1\left(1-l^{-1}x\right)+U_2l^{-1}x,\ \ u_t(x,0)=0.$$

$A=2, B=1, U_1=1, U_2=0$.

РЕШЕНИЕ.

Получаем задачу:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+2x+1,\ 0<x<l,\ t>0,$$
$$u(0,t)=1,\ u(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=1-l^{-1}x,\ \ u_t(x,0)=0.$$

Ищем решение в виде суммы функций $u=v+w$, где w - решение неоднородной задачи:

$$w_{tt}=a^2w_{xx}+2x+1,\ 0<x<l,\ t>0,$$
$$w(0,t)=1,\ w(l,t)=0,$$

Ищем ее в виде $w=w(x)$. Получаем:

$$\begin{cases} a^2w''=-2x-1, \\ w(0)=1, w(l)=0. \end{cases}$$

Решаем данную задачу:

$$w''=-\frac{2}{a^2}x-\frac{1}{a^2},$$
$$w'=\int\left(-\frac{2}{a^2}x-\frac{1}{a^2}\right)dx=-\frac{1}{a^2}x^2-\frac{1}{a^2}x+C_1,$$
$$w=\int\left(-\frac{1}{a^2}x^2-\frac{1}{a^2}x+C_1\right)dx=-\frac{1}{3a^2}x^3-\frac{1}{2a^2}x^2+C_1x+C_2.$$

Получили $w(x)=-\frac{1}{3a^2}x^3-\frac{1}{2a^2}x^2+C_1x+C_2$.

Подставляем граничные условия:

$$\begin{cases} w(0)=C_2=1, \\ w(l)=-\frac{1}{3a^2}l^3-\frac{1}{2a^2}l^2+C_1l+C_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = 1, \\ C_1 = \dfrac{1}{3a^2} l^2 + \dfrac{1}{2a^2} l - \dfrac{1}{l}. \end{cases}$$

Итак,

$$w(x) = -\frac{1}{3a^2} x^3 - \frac{1}{2a^2} x^2 + \left(\frac{1}{3a^2} l^2 + \frac{1}{2a^2} l - \frac{1}{l} \right) x + 1.$$

Теперь возвращаемся к второй функции $v(x,t)$. Получаем для нее следующую задачу:

$$v_{tt} = a^2 v_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,$$

$$v(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,$$

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = 1 - l^{-1}x + \frac{1}{3a^2} x^3 + \frac{1}{2a^2} x^2 - \left(\frac{1}{3a^2} l^2 + \frac{1}{2a^2} l - \frac{1}{l} \right) x - 1 =$$

$$= \frac{1}{3a^2} x^3 + \frac{1}{2a^2} x^2 - \left(\frac{1}{3a^2} l^2 + \frac{1}{2a^2} l \right) x,$$

$$v_t(x,0) = u(x,0) - w_t(x,0) = 0.$$

Решаем данную задачу. Собственные значения и функции известны (см. например задачу 1): $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2$, $X_n = \sin \frac{\pi n}{l} x.$

Общее решение: $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{\pi n a}{l} t + B_n \cos \frac{\pi n a}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x$.

Начальные условия:

$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \frac{1}{3a^2} x^3 + \frac{1}{2a^2} x^2 - \left(\frac{1}{3a^2} l^2 + \frac{1}{2a^2} l \right) x$, откуда

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left[\frac{1}{3a^2} x^3 + \frac{1}{2a^2} x^2 - \left(\frac{1}{3a^2} l^2 + \frac{1}{2a^2} l \right) x \right] \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

$v_t(x,0) = \frac{\pi n a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x = 0$, откуда $A_n = 0$.

Итак, общее решение задачи имеет вид:

$$u(x,t) = -\frac{1}{3a^2} x^3 - \frac{1}{2a^2} x^2 + \left(\frac{1}{3a^2} l^2 + \frac{1}{2a^2} l - \frac{1}{l} \right) x + 1 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \left(\frac{\pi n a}{l} t \right) \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right),$$

где $B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left[\frac{1}{3a^2} x^3 + \frac{1}{2a^2} x^2 - \left(\frac{1}{3a^2} l^2 + \frac{1}{2a^2} l \right) x \right] \sin \frac{\pi n}{l} x dx$.