Задача по уравнению с математической физики с решением
Уравнение Лапласа в кольцевом секторе

ЗАДАНИЕ.

Решить методом разделения переменных следующую задачу для уравнения Лапласа в кольцевом секторе $0<a<\rho<b$, $0<\varphi<\pi/\alpha$ *при* $\alpha=1,2,3,4$.

$\Delta u(\rho,\varphi)=0,$

$u(\rho,0)=u(\rho,\pi/\alpha)=0,$

$u(a,\varphi)=3\sin\alpha\varphi-\sin 2\alpha\varphi,\ u(b,\varphi)=0.$

РЕШЕНИЕ.

Решаем данную задачу для уравнения Лапласа в кольцевом секторе.

Частное решение задачи будем искать в виде $u(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)$.
Подставляем, разделяем переменные и получаем:

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\lambda,$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)-\lambda R=0.$$

$\Phi''+\lambda\Phi=0.$

Решение первого уравнения представляется в виде

$R_0(\rho)=C_0+D_0\ln\rho,$

$R_n(\rho)=\left(C_n\rho^n+D_n\rho^{-n}\right),\ n=1,2,\ldots$

Решение задачи Штурма-Лиувилля для второго уравнения:

$\Phi''+\lambda\Phi=0,$

$\Phi(0)=\Phi(\pi/\alpha)=0.$

Можно записать в виде $\Phi_n(\varphi)=\sin\sqrt{\lambda_n}\varphi,\ \lambda_n=\left(\frac{\pi n}{(\pi/\alpha)}\right)^2=(n\alpha)^2,\ n=1,2,3,\ldots$

Тогда частные решения имеют вид: $u_n(\rho,\varphi)=\left(\alpha_n\rho^n+\beta_n\rho^{-n}\right)\sin n\alpha\varphi$

Общее решение

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\rho^n+\beta_n\rho^{-n}\right)\sin n\alpha\varphi.$$

Найдем значения констант из граничных условий

$$u(a,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n a^n+\beta_n a^{-n}\right)\sin n\alpha\varphi=3\sin\alpha\varphi-\sin 2\alpha\varphi,$$

$$u(b,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n b^n+\beta_n b^{-n}\right)\sin n\alpha\varphi=0$$

Сопоставляя правую и левую часть каждого выражения, найдем:

$$\alpha_1 a+\beta_1 a^{-1}=3,$$
$$\alpha_1 b+\beta_1 b^{-1}=0,$$
$$\alpha_2 a^2+\beta_2 a^{-2}=-1,$$
$$\alpha_2 b^2+\beta_2 b^{-2}=0,$$
$$\alpha_n=\beta_n=0,\ n\neq 1,2.$$

$$\alpha_1=\frac{3/b}{a/b-b/a},$$
$$\beta_1=\frac{-3b}{a/b-b/a},$$
$$\alpha_2=\frac{-1/b^2}{(a/b)^2-(b/a)^2},$$
$$\beta_2=\frac{b^2}{(a/b)^2-(b/a)^2},$$
$$\alpha_n=\beta_n=0,\ n\neq 1,2.$$

Итак, общее решение уравнения имеет вид:

$$u(\rho,\varphi)=\left(\frac{3/b}{a/b-b/a}\rho+\frac{-3b}{a/b-b/a}\rho^{-1}\right)\sin\alpha\varphi+$$
$$+\left(\frac{-1/b^2}{(a/b)^2-(b/a)^2}\rho^2+\frac{b^2}{(a/b)^2-(b/a)^2}\rho^{-2}\right)\sin 2\alpha\varphi.$$

Здесь $\alpha=1,2,3,4$.