

## Вариационное исчисление: решение задачи Больца

ЗАДАНИЕ. Решить задачу Больца

$$8. \int_0^1 \dot{x}^2 dt + \alpha x^2(1) \rightarrow \text{extr}, \quad x(0) = 1.$$

РЕШЕНИЕ. Отметим, что в нашем случае

$$f(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2, \quad \psi(x(0), x(1)) = \alpha x^2(1).$$

1. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:

а) уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt} \hat{f}_{\dot{x}} + \hat{f}_x = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} 2\dot{x} = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = \text{const}.$$

б) условия трансверсальности:

$$\hat{f}_{\dot{x}}(0) = \hat{\psi}_{x(0)} \Leftrightarrow \dot{x}(0) = 0;$$

$$\hat{f}_{\dot{x}}(1) = -\hat{\psi}_{x(1)} \Leftrightarrow 2\dot{x}(1) = -2\alpha x(1) \Leftrightarrow \dot{x}(1) + \alpha x(1) = 0.$$

Общее решение уравнения Эйлера:

$$x(t) = C_1 t + C_2.$$

Из условий трансверсальности и начального условия находим, что  $C_1 = 0$ ,

$C_2 = 1$ ,  $\alpha = 0$ . Таким образом, имеется единственная допустимая экстремаль

$$\hat{x}(t) = 1.$$

2. Покажем, что она доставляет абсолютный минимум в задаче.

Действительно, если  $h(t) \in C^1[0,1]$ , то  $\hat{x}(t) + h(t)$  - произвольная допустимая

точка в задаче Больца и

$$B(\hat{x}(t) + h(t)) - B(\hat{x}(t)) = \int_0^1 (\dot{\hat{x}}(t) + \dot{h}(t))^2 dt - \int_0^1 (\dot{\hat{x}}(t))^2 dt = \int_0^1 (0 + \dot{h}(t))^2 dt - \int_0^1 0^2 dt = \int_0^1 (\dot{h}(t))^2 dt \geq 0$$

Задача с решением по вариационному исчислению  
скачана с [https://www.matburo.ru/ex\\_dr\\_all.php?p1=vi](https://www.matburo.ru/ex_dr_all.php?p1=vi)  
(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию  
при любом выборе функции  $h(t)$ . Следовательно,  $\hat{x}(t) = 1$  доставляет  
абсолютный минимум.

**Ответ:**  $\hat{x}(t) = 1 \in \text{abs min}$ .