Интеграл: вычисление площадей и объемов

Площадь плоской фигуры

Если фигура ограничена кривой $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Если фигура ограничена кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_2(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)\,dx.$$

Если кривая задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площадь, ограниченная этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a, b]$ вычисляется по формуле

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,dt, \quad a = x(\alpha),\ b = x(\beta).$$

Если фигура ограничена кривой, заданной в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Площадь поверхности вращения

Если дуга кривой $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, вращается вокруг оси Ox, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}dx.$$

Если дуга кривой задана параметрически $y = y(t)$, $x = x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, то

$$S = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt.$$

Объем тела вращения

Если тело образовано в результате вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, то его объем вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 \, dx.$$

Если тело образовано в результате вращения вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = f(y)$, осью Oy и прямыми $y = c$ и $y = d$, то его объем вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 \, dy.$$

Если тело образовано в результате вращения вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, то его объем вычисляется по формуле

$$V = 2\pi \int_a^b xy \, dx.$$

Длина кривой

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, то

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Если кривая задана параметрически $y = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt.$$

Если кривая задана в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi.$$