Контрольная работа № 8

Кратные и криволинейные интегралы.

Элементы теории поля.

ТЕМА 8. Кратные и криволинейные интегралы.

Элементы теории поля.

1. Двойные интегралы.
2. Тройные интегралы.
3. Криволинейные интегралы.
4. Теория поля.

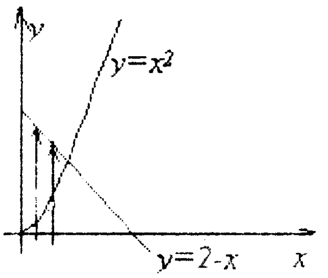
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб.для вузов:в 3т.-5-е изд.,стер.-М.:Дрофа .- (Высшее образование. Современный учебник).т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление.-2003.-509 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие: в 2-х т.- Изд. стер. –М.: Интеграл – Пресс.Т.1. -2001.- 415 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Учеб. для вузов: в 3-х томах. – 8-е изд.-М.: Физматлит. т.1 – 2001. -697 с.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. -22-е изд., перераб.- СПб: Профессия, 2003.-432 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Учеб. для вузов: В 3-х томах. – 5-е изд., перераб. и доп. –М.: Дрофа. Т.1. – 2003.-703 с.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Учеб. для вузов в 2-х частях. – 6-е изд. стер. –М. Физматлит, 2002, -646 с.
7. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями): в 2 ч./ Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.-6-е изд..-М.: ОНИКС 21 век, ч.2. -2002.-416 с.

Решение типового варианта контрольной работы.

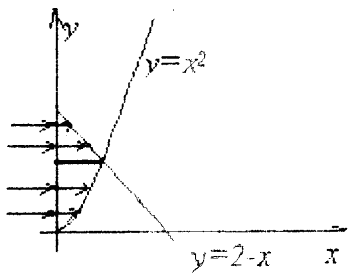
Задача 8.1. Записать двойной интеграл в виде повторного и изменить порядок интегрирования, если область интегрирования $D: y = x^2;\ y = 2 - x;\ x \ge 0$.

Решение. Область интегрирования *D* является правильной (простой) в направлении оси *ОУ*, т.к. любая прямая, параллельная оси *ОУ*, пересекает границу области *D* не более чем двух точках. Первую точку пересечения с линией $\boldsymbol{y=x^2}$ назовем точкой входа, а линию - линией входа, ее уравнение $\boldsymbol{y=x^2}$**.** Вторую точку пересечения с линией $\boldsymbol{y=2-x}$ назовем точкой выхода, а линию – линией выхода. Тогда повторный интеграл в правой части составлен из двух определенных: первый берется по переменному **y,** оси которого *ОУ* параллельны секущие прямые, он называется внутренним. Пределы интегрирования в нем зависят от $\boldsymbol{x}$ и совпадают с ординатами точек пересечения секущих с линией входа (нижний предел) и линией выхода (верхний предел интегрирования). При внутреннем интегрировании переменное $\boldsymbol{x}$ считается постоянным, поэтому его результатом является функция, которая после подстановки пределов интегрирования зависит от x. Второй интеграл по x берется от этой функции по переменному x, а пределы интегрирования в нем равны наименьшему (для нижнего) и наибольшему (для верхнего) значению проекций точек области D на ось OX:



$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$$

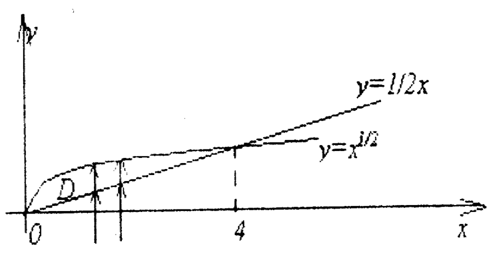
При изменении порядка интегрирования линия входа в область D имеет уравнение $x=0$, а линия выхода разбивается на две части, одна из которых имеет уравнение $\tilde{o}=\sqrt{\acute{o}}$, а вторая – уравнение $\tilde{o}=2-\acute{o}$. По свойству аддитивности двойного интеграла он разбивается на два, в каждом их которых сделана замена на повторный с внутренним интегрированием по переменному ***x***, а внешним интегрированием по переменному ***y:***



$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$$

Задача 8.2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной графиками данных функций

$$\iint\limits_D \left(x^2 - xy\right)dxdy; \quad y=\sqrt{x};\ y=\frac{1}{2}x.$$



Решение. Область интегрирования D является правильной (простой) в направлении оси ОУ, поэтому заменяем двойной интеграл повторным с внутренним интегралом по ***y,*** а внешним – по ***x.*** Линией входа в D является прямая $\acute{o} = \frac{1}{2}\tilde{o}$, линией выхода – парабола $\acute{o} = \sqrt{\tilde{o}}$. Вычисляем внутренний интеграл при постоянном ***x***, применяя формулу Ньютона-Лейбница с нижним пределом $\frac{1}{2}\tilde{o}$ и верхним пределом $\sqrt{\tilde{o}}$. Находим точки пересечения параболы и прямой из решения системы

$$\begin{matrix} \acute{o} = \sqrt{\tilde{o}} \\ \acute{o} = \frac{1}{2}\tilde{o} \end{matrix} \qquad \sqrt{\tilde{o}} = \frac{1}{2}\tilde{o}, \quad \tilde{o}^2 - 4\tilde{o} = 0, \qquad \tilde{o}_1 = 0, \quad \tilde{o}_2 = 4$$

Полученные абсциссы точек пересечения и дают пределы интегрирования во внутреннем интеграле.

Процесс сведения двойного интеграла к двухкратному сводится к следующему:

$$\iint_D \left(x^2 - xy\right)dxdy = \int_0^4 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} \left(x^2 - xy\right)dy = \int_0^4 \left. \left(x^2 y - x\frac{y^2}{2}\right)\right|_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$\int_0^4 \left(x^2\sqrt{x} - x\frac{x}{2} - \left(x^2\frac{1}{2}x - x\frac{1}{2}\frac{1}{4}x^2 \right)\right)dx = \int_0^4 \left(x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}x^3 \right)dx =$$

$$\left. \left(\frac{2}{7}x^{\frac{2}{7}} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{32}x^4 \right)\right|_0^4 dx = \frac{2}{7}128 - \frac{1}{6}64 - \frac{3}{32}256 = \frac{40}{21}.$$

Задача 8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных координат к полярным:

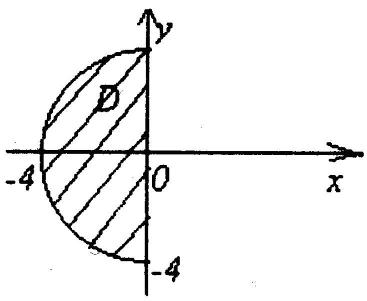
$$\int_{-4}^{0} dx \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \frac{2y - 3x}{x^2 + y^2} dy.$$

Решение. Найдем границы области интегрирования в декартовых координатах.

Преобразуем $y = -\sqrt{16 - x^2}$: $\begin{cases} y^2 + x^2 = 16 \\ y \le 0 \end{cases}$

Преобразуем $y = \sqrt{16 - x^2}$: $\begin{cases} y^2 + x^2 = 16 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Изобразим область интегрирования:



Для расстановки пределов интегрирования в полярных координатах учтем, что область D – круговой сектор, ограниченный дугой окружности $\tilde{o}^2 + \acute{o}^2 - 16$, уравнение которой с учетом связи декартовых и полярных координат $\begin{matrix} \tilde{o} = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{matrix}$ примет вид

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 16, \qquad \text{т.е.} \quad \rho = 4.$$

D ограничена также лучами $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ $\grave{e}$ $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$. Поэтому требуемый интеграл I в полярных координатах получится из исходного с помощью связи декартовых и полярных координат и домножения на ρ подынтегральной функции внутреннего интеграла по ρ, учитывающего искажение элемента площади в полярных координатах. В других примерах для расстановки пределов интегрирования, использовать, по аналогии с декартовыми координатами, рассечение D лучами, выходящими из центра полярной системы координат. Если они пересекутся с границей D не более чем в двух точках, то эта область - правильная по ρ, и пределы в повторном интеграле с внутренним интегралом по ρ и внешним по φ расставляются аналогично расстановке по $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x}$ в случае декартовых координат.

Процесс вычисления двухкратного интеграла в полярных координатах после замены пределов интегрирования и подинтегральных выражений сведется к следующему:

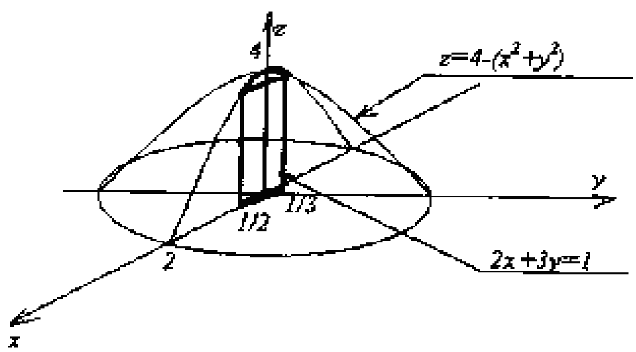
$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^4 \frac{2\rho\sin\varphi - 3\rho\cos\varphi}{(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2}\rho d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^4 (2\sin\varphi - 3\cos\varphi) d\rho =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (2\sin\varphi - 3\cos\varphi)\rho\Big|_0^4 d\varphi = 4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (2\sin\varphi - 3\cos\varphi) d\varphi = 4(-2\cos\varphi - 3\sin\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} =$$

$$= 4\left(-3\sin\frac{3\pi}{2} + 3\sin\frac{\pi}{2}\right) = 24.$$

Задача 8.4. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:

$z = 4 - (x^2 + y^2);\quad 2x + 3y = 1;\quad x \ge 0;\quad y \ge 0;\quad z \ge 0.$



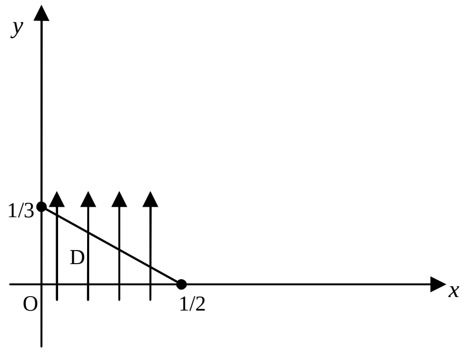
Решение. При сведении тройного интеграла к трехкратному и в расстановке пределов в каждом из трех определенных интегралов действуем по аналогии со случаем двойного интеграла. Область интегрирования V в примере считаем правильной в направлении оси OZ, т.к. любая прямая, параллельная оси OZ, пересекает границу области не более чем в двух точках. Учитывая, что объем области V выражается в декартовых координатах формулой

$$V = \iiint_V dxdydz,$$

а область V ограничена снизу плоскостью z=0, а сверху – поверхностью параболоида вращения $z=4-(x^2+y^2)$ можно свести тройной интеграл к вычислению двойного интеграла от однократного:

$$V = \iiint_V dxdydz = \iint_D \left(\int_{z=0}^{z=4-\left(x^2+y^2\right)} dz \right) dxdy.$$

Сначала вычисляется внутренний интеграл по переменному z с нижним пределом z=0 и верхним пределом $z=4-(x^2+y^2)$. Областью интегрирования D во внешнем двойном интеграле является проекция тела V на плоскость XOY, имеющая вид:



Линия входа в эту область y=0, линия выхода $y = \frac{1}{3}(1-2x)$. Проекцией области D на ось OX служит отрезок $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Отсюда следует, что во внутреннем интеграле по y нижний предел 0, верхний предел $\frac{1}{3}(1-2õ)$, а во внутреннем интеграле по x нижний предел 0, а верхний предел $\frac{1}{2}$. В итоге объем V вычисляется с помощью трехкратного интеграла следующим образом:

$$V = \iiint_V dxdydz = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\frac{1}{3}(1-2x)} dy \int_0^{4-\left(x^2+y^2\right)} dz = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\frac{1}{3}(1-2x)} z\Big|_0^{4-\left(x^2+y^2\right)} dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\frac{1}{3}(1-2x)} \left(4-\left(x^2+y^2\right)\right) dy =$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\left(4-x^2\right)y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{3}(1-2x)}dx=\int\left(\left(4-x^2\right)\frac{1}{3}(1-2x)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(1-2x)\right)^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{81}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(107-210x-39x^2+62x^3\right)dx=\frac{1}{81}\left(107x-210\frac{x^2}{2}-39\frac{x^3}{3}+62\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{81}\left(107\frac{1}{2}-105\frac{1}{4}-13\frac{1}{8}+\frac{31}{2}\frac{1}{16}\right)=\frac{851}{2592}.$$

Задача 8.5. 1) Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода: $\int_L\left(x^3+y\right)dl,$ где $L: y=x^3; 0\le x\le 1.$

Решение. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода может быть сведено к вычислению определенного интеграла, причем способ такого сведения зависит от представления кривой интегрирования L. Если L задана уравнением $y=\varphi(x),\ a\le x\le b,$ где функция $y=\varphi(x)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(x)$ для $\tilde{o}\in[\grave{a},b]$, то

$$\int_L f(x,y)dl=\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\left(\varphi'(x)^2\right)}dx$$

Если L задана параметрически: $\tilde{o}=\tilde{o}(t),\ y=y(t),\ \alpha\le t\le\beta,$ где функции $x(t)$ $\grave{e}$ $y(t)$ имеют непрерывные производные $\tilde{o}'(t),\ \ y'(t)$, для $x\in[\alpha,\beta]$ то

$$\int_L f(x,y)dl=\int_\alpha^\beta f(x(t),\ y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

Если L задана в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi),\alpha\le\varphi\le\beta$ и функция $\rho(\varphi)$ имеет непрерывную производную $\rho'(\varphi)$ для $\varphi\in[\alpha,\beta]$, то

$$\int_L f(x,y)dl=\int_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi$$

В рассмотренном примере используется явное задание кривой L уравнением $y=x^3$. Поэтому, используя первый способ сведения интеграла по длине дуги к определенному, получим:

$$\int_L\left(x^3+y\right)dl=\int_0^1\left(x^3+x^3\right)\sqrt{1+\left(\left(x^3\right)'\right)^2}\,dx=2\int_0^1\left(x^3+y\right)dl\sqrt{1+\left(\left(x^3\right)'\right)^2}\,dx=$$

$$=2\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx=\left|\begin{array}{l}t^2=1+9x^4\\ 2tdt=36x^3dx\\ x_1=0\Rightarrow t=1\\ x_2=1\Rightarrow t=\sqrt{10}\end{array}\right|=$$

$$2\int_1^{\sqrt{10}}\frac{1}{18}t\sqrt{t^2}\,dt=\frac{1}{9}\int_1^{\sqrt{10}}t^2dt=\frac{1}{9}\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^{\sqrt{10}}=\frac{1}{27}\left(\sqrt{1000}-1\right).$$

2) Вычислить работу силы $\overline{F} = x^2\overline{i} + (x-y)\overline{j}$ при перемещении материальной точки по кривой $y = x^2$ от точки *A(0;0)* до точки *B(1;1).*

Решение. Работа переменной силы $\vec{F}(P(x,y), Q(x,y))$ по перемещению материальной точки по плоской кривой L с уравнением $y = \varphi(x)$ вычисляется с помощью криволинейного интеграла 2-го рода по координатам

$$A = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

который сводится к определенному интегралу с учетом способа задания кривой L. В приведенном примере кривая L задана явно уравнением $y = x^2,\ 0 \le x \le 1$. Поэтому, по аналогии с переходом к определенному интегралу в предыдущем примере, достаточно заменить:

$y = x^2,\ dy = 2xdx$. Получим:

$$A = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L x^2dx + (x-y)dy = \int_0^1 x^2dx + \left(x - x^2\right)2xdx =$$

$$= \int_0^1 \left(3x^2 - 2x^3\right)dx = \left(x^3 - \frac{1}{2}x^4\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Задача 8.6. а) Вычислить площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 4y$ и плоскостью $x = 0,\quad x \ge 0,\ z \ge 0$

Решение. Область D является кругом (рис.2), поэтому решаем задачу в полярных координатах. Тогда

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}},\quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} =$$

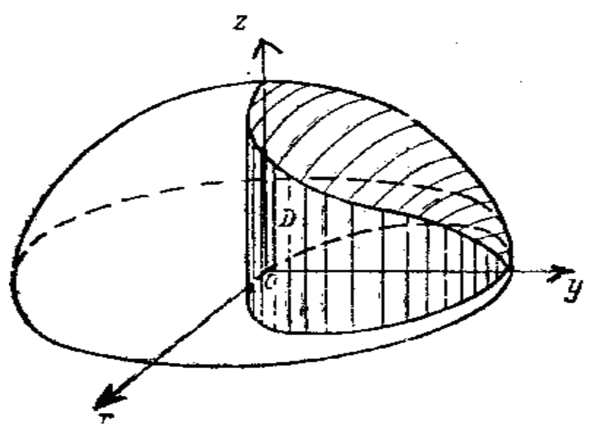
$$= \frac{4}{\sqrt{16 - z^2}}.$$

Элемент площади плоской области dS выражается в полярных координатах в виде: $dS = \rho d\rho d\varphi$. Полярное уравнение окружности, ограничивающей область интегрирования, будет иметь вид:

$\rho = 4\sin\varphi$. Так как область интегрирования содержит начало полярной системы точку O на своей границе, то вычисляем площадь поверхности σ с помощью поверхностного интеграла 1-го рода:

$$\sigma = \iint_\sigma 1\cdot d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dS = \iint_D \frac{4}{\sqrt{16 - \rho^2}}\rho d\rho d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{4\sin\varphi} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{16 - \rho^2}} = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{16 - \rho^2}\,\Big|_0^{4\sin\varphi}\right)d\varphi =$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos\varphi)d\varphi = 8(\pi - 2)$$



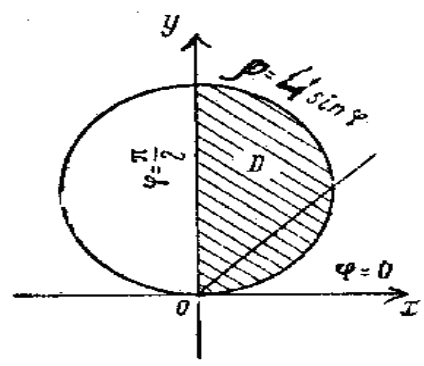


Рис. 1 Рис. 2

б) Найти поверхностный интеграл 2-го рода $I = \iint\limits_{\sigma} z^2 dydz + xzdydz + ydxdy,$ где замкнутая поверхность σ состоит из внешней стороны части поверхности параболоида $\sigma_1 : x^2 + y^2 = 4 - z, \quad z \ge 0,$ а также из части плоскости $\sigma_2 : z = 0.$

Решение. Применяем формулу Остроградского-Гаусса к поверхностному интегралу 2-го рода *I*:

.
$$I = \iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

В векторной форме формула Остроградского-Гаусса имеет вид:

$$Ï = \iint\limits_{\sigma} \vec{a}_n d\sigma = \iiint\limits_{V} div\vec{a} dV,$$

где в левой части – поток П векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность σ, а

$$div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Но тогда $I = \iiint\limits_{V} div\vec{a}\,(M)dV,$ где векторное поле $\vec{a}\,(M)$ имеет вид:

$\vec{a} = (M) = z^2\vec{i} + xz\vec{j} + y\vec{k}.$ Но $div\vec{a}(M) = \frac{\partial z^2}{\partial x} + \frac{\partial (xz)}{\partial y} + \frac{\partial y^2}{\partial z} = 0.$

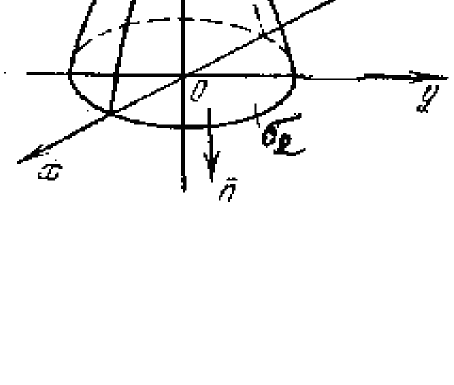


Рис. 3.

Следовательно, $I = \iiint\limits_V 0 dV = 0.$

Задача 8.7. а) Найти координаты центра тяжести плоской однородной пластины D, ограниченной линиями $y = x^2, \quad x = 2, \quad y = 0$

Решение. Считаем плотность однородной пластины $\rho = 1.$ Тогда ее статические моменты относительно осей ОХ и ОУ определяются формулами: $M_x = \iint\limits_D y dS, \quad M_y = \iint\limits_D x dS$, а координаты ее центра тяжести $\tilde{N}(x_c; y_c)$

определяются формулами: $x_c = \dfrac{M_y}{m}, \quad y_c = \dfrac{M_x}{m}$, где $m = \iint\limits_D 1 \cdot dS$ - масса однородной пластины D с плотностью $\rho = 1.$ Применяя эти формулы, получаем:

$$M_x = \iint\limits_D y dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} y dy = \frac{1}{2}\int_0^2 x^4 dx = \frac{16}{5}, \qquad M_y = \iint\limits_D x dx dy = \int_0^2 x dx \int_0^{x^2} dy = \int_0^2 x^3 dx = 4,$$

$$m = \iint\limits_D dS = \iint\limits_D dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} dy = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3.} \quad \text{Тогда} \quad x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{3}{2}, \quad y_c = \frac{M_y}{m} = \frac{6}{5}.$$

б) Доказать, что работа силы $\vec{F} = \left(\dfrac{y}{1 + x^2 y^2} - 1\right)\vec{i} + \left(\dfrac{x}{1 + x^2 y^2} - 10\right)\vec{j}$ зависит только от начального и конечного положения точки ее приложения и не зависит от формы пути. Вычислить работу при перемещении точки приложения силы из $M_1(0,0)$ в $M_2(1,1).$

Решение. Проверяем условие, достаточное для того, чтобы работа силы $\vec{F}$ по перемещению точки по дуге $\cup M_1 M_2$ не зависела от формы пути:

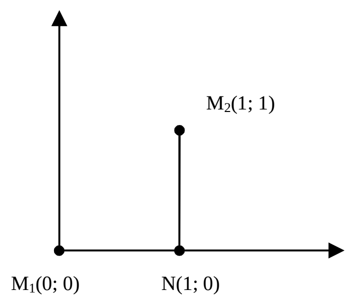
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{1 + x^2 y^2} - 1\right) = \frac{1 + x^2 y^2 - 2x^2 y^2}{(1 + x^2 y^2)^2} = \frac{1 - x^2 y^2}{(1 + x^2 y^2)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1 + x^2 y^2} - 10\right) = \frac{1 + x^2 y^2 - 2x^2 y^2}{(1 + x^2 y^2)^2} = \frac{1 - x^2 y^2}{(1 + x^2 y^2)^2}, \text{ то есть } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

При этом функции $P(x, y), \ Q(x, y), \ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y), \ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ непрерывны в любой односвязной области D, содержащей $\cup M_1 M_2$

Тогда, для вычисления работы $\text{А} = \int\limits_{\ddot{A}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ находим криволинейный интеграл 2-го рода

$A=\int\limits_{\cup M_1M_2}\left(\frac{y}{1+x^2y^2}-1\right)dx+\left(\frac{x}{1+x^2y^2}-10\right)dy.$ В силу независимости этого интеграла от пути интегрирования вычислим его вдоль ломаной M_1NM_2, где точка $N(1{,}0)$:



Тогда $A=\int\limits_{M_1N}\left(\frac{y}{1+x^2y^2}-1\right)dx+\left(\frac{x}{1+x^2y^2}-10\right)dy+\int\limits_{NM_2}\left(\frac{y}{1+x^2y^2}-1\right)dx+\left(\frac{x}{1+x^2y^2}-10\right)dy=$

$$=\int_0^1(-1)dx+\int_0^1\left(\frac{1}{1+y^2}-10\right)dy=-x\Big|_0^1+(arctgy-10y)\Big|_0^1=-1+arctg1-10=\frac{\pi}{4}-11$$

При вычислении криволинейного интеграла 2-го рода по M_1N x меняется от 0 до 1, $y=0$, $dy=0$, а при вычислении аналогичного интеграла по NM_2 $x=1$, $dx=0$, а y меняется от 0 до 1.

Задача 8.8 а) Найти величину и направление наибольшего изменения поля $U(M)=5x^2yz-7xy^2z+5xyz^2$ в точке $M_0(1{,}1{,}1)$.

Решение. Доказано (см. [1], [2], [5], [6]), что скалярное поле U(M) имеет в данной точке M_0 максимальную производную по направлению $\frac{\partial U}{\partial l}(M_0)$, которая равна модулю градиента поля U в этой точке:

$$\max\frac{\partial U}{\partial l}(M_0)=|gradU(M_0)|,$$

если за вектор $\vec{l}$, указывающий направление дифференцирования, взять направление вектора $gradU(M_0)$. Поэтому в задаче требуется найти сам вектор

$$gradU(M_0)=\frac{\partial U}{\partial x}(M_0)\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}(M_0)\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}(M_0)\vec{k}.$$

Приведем соответствующие вычисления:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(M)=10xyz-7y^2z+5yz^2,\quad \frac{\partial U}{\partial x}(M_0)=10-7+5=8,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(M)=5x^2z-14xyz+5xz^2,\quad \frac{\partial U}{\partial y}(M_0)=5-14+5=-4,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}(M)=5x^2y-7xy^2+10xyz,\quad \frac{\partial U}{\partial z}(M_0)=5-7+10=8,$$

$$gradU(M_0)=8\vec{i}-4\vec{j}+8\vec{k}$$

$$\frac{\partial U}{\partial gradU}(M_0)=\max\frac{\partial U}{\partial l}(M_0)=\left|gradU(M_0)\right|=\sqrt{8^2+(-4)^2+8^2}=12$$

б) Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}(M)=(x+y)\vec{i}+(z-y)\vec{j}+2(x+z)\vec{k}$ потенциальным.

Решение. Векторное поле $\vec{a}(M)-$ потенциально, если в каждой точке M из области определения поля $rot\ \vec{a}\ (M)=\vec{0}.$ Находим

$$rot\ \vec{a}\ (M)=[\nabla,\vec{a}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k},$$

В этой формуле для удобства запоминания метода вычисления ротора использован формальный оператор Гамильтона «набла»:

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$

действующий по правилу нахождения векторного произведения в прямоугольных декартовых координатах.

Для других типов полей, исследуемых в задании 8, приведем их определения:

Соленоидальное поле $\vec{a}(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ в каждой точке M области V удовлетворяет условию

$$div\vec{a}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}(M)+\frac{\partial Q}{\partial y}(M)+\frac{\partial R}{\partial z}(M)=0.$$

Гармоническое поле $\vec{a}(M)$ является в каждой точке области V одновременно потенциальным и соленоидальным, то есть $rot\vec{a}(M)=\vec{0}$ и $div\vec{a}(M)=0$

В нашем случае $\frac{\partial P}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=1,\quad \frac{\partial R}{\partial x}=2,\quad \frac{\partial R}{\partial y}=0.$ Тогда

$rot\,\vec{a}\,(M)=(0-1)\vec{i}+(0-2)\vec{j}+(0-1)\vec{k}=-\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}\neq\vec{0},$ следовательно, поле $\vec{a}(M)$ не является потенциальным.

Контрольная работа №8.

Вариант 1.

8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int_{-1}^{0} dx \int_{-8x^2}^{-2x+6} f(x,y)dy$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint_D xy^2 dxdy, \quad D: y = x^2,\ y = 2x$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dy$

8.4. Вычислить площадь плоских фигур, ограниченных данными линиями $x = 0; \quad y = e^x; \quad y = e$

8.5. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода

$\int_{\angle} (x^2 + y^2) dl, \quad где\ \angle - окружность\ x^2 + y^2 = 4$

8.6. Вычислить площадь части поверхности, уравнение которой задано в условии задач первым, вырезанной другими заданными поверхностями из нее. $x^2+z^2=1,\ 2x+y=2,\ y\text{-}2,\ z=0 \quad x>0,\ y>0,\ z>0$

8.7. Найти координаты центра тяжести плоских однородных пластин, ограниченных заданными линиями $x^2+y^2=4, \quad x=0, y=0 \qquad x>0,\ y>0$

8.8. Найти угол между градиентами скалярных полей $U(x,y,z)$ è $V(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$ $U = \frac{yz^2}{x^2}, \quad V = \frac{x^2}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3, \quad M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Контрольная работа №8.
Вариант 2.

8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int_1^3 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint xy^3 dxdy,\ D: y = x^3,\ y \geq 0,\ y = 4x$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dy$

8.4. Вычислить площадь плоских фигур, ограниченных данными линиями $x+1=0;\quad y = arc\sin x;\quad y = \frac{\pi}{2}$

8.5. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода
$\int_{\angle} \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, *где* $\angle -$ *отрезок прямой, соединяющий точки* $O(0,0)$ *и* $B(2,2)$

8.6. Вычислить площадь части поверхности, уравнение которой задано в условии задач первым, вырезанной другими заданными поверхностями из нее.
$y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=4,\ x=0,\ y=0,\ x>0,\ y>0,\ z>0$

8.7. Найти координаты центра тяжести плоских однородных пластин, ограниченных заданными линиями $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\quad x=3,\quad y=2$

8.8. Найти угол между градиентами скалярных полей $U(x,y,z)$ *è* $V(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$ $U = \frac{x}{yz^2},\quad V = x^2-y^2-3z^2,\quad M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Контрольная работа №8.
Вариант 3.

8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int_0^1 dy \int_{-4y-4}^{-8y^3} f(x,y)dx$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint_D (x+y)dxdy, \quad D: y^2 = x, \ \ y = x$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

8.4. Вычислить площадь плоских фигур, ограниченных данными линиями $x=1; \quad y = arc\,tgx; \quad y + \frac{\pi}{4} = 0$

8.5. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода $\int_{\angle} \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right)dl,$ *где* $\angle -$ *отрезок прямой, соединяющий точки* $A(0,4)$ *и* $B(4,0)$

8.6. Вычислить площадь части поверхности, уравнение которой задано в условии задач первым, вырезанной другими заданными поверхностями из нее.
$x^2+y^2=z^2, \ \ x+y=1, \ \ x=0, \ \ y=0, \ \ x>0, \ \ y>0, \ \ z>0$

8.7. Найти координаты центра тяжести плоских однородных пластин, ограниченных заданными линиями $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1, \quad x = 2, \quad y = 3$

8.8. Найти угол между градиентами скалярных полей $U(x,y,z)$ *è* $V(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$ $U = \frac{1}{xyz}, \quad V = x^2 + 9y^2 + 6z^2, \quad M\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

Контрольная работа №8.
Вариант 4.

8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int_0^1 dx \int_{8x^3}^{4x+4} f(x,y)dy$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint_D (x^3-2y)dxdy, \quad D: y=x^2-1,\ y=0$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{tg\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

8.4. Вычислить площадь плоских фигур, ограниченных данными линиями $y=\ln x; \quad x+2y-2=e; \quad y=0$

8.5. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода
$\int_{\angle} ydl$, *где* $\angle -$ *дуга астроиды* $x=\cos^3 t,\ \ y=\sin^3 t$, *заключенная между точками* $A(1,0)$ *и* $B(0,1)$

8.6. Вычислить площадь части поверхности, уравнение которой задано в условии задач первым, вырезанной другими заданными поверхностями из нее.
$y^2+z^2=y, \quad y^2+z^2=x^2, \ x=y, \ x>0, \ y>0, \ z>0$

8.7. Найти координаты центра тяжести плоских однородных пластин, ограниченных заданными линиями $y^2=2x, \quad x=1$

8.8. Найти угол между градиентами скалярных полей $U(x,y,z)$ *è* $V(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$ $U = x^2yz^2, \quad V = \frac{3}{2}x^2+3y^2-2z^2, \quad M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

Контрольная работа №8.
Вариант 5.

8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int_{-1}^{0} dy \int_{2y-6}^{8y^3} f(x,y)dx$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint_D (1+y)dxdy, \quad D: y^2 = x, \quad 5y = x$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \cos(x^2+y^2)dy$

8.4. Вычислить площадь плоских фигур, ограниченных данными линиями
$y = tgx; \quad y = ctgx; \quad y = 0; \quad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

8.5. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода
$\int_{\angle} \sqrt{2y dl}$, *где* $\angle -$ *первая прка циклоиды* $\quad x = 2(t - \sin t), \; y = 2(1 - \cos t)$

8.6. Вычислить площадь части поверхности, уравнение которой задано в условии задач первым, вырезанной другими заданными поверхностями из нее.
$z^2=2xy, \; x=y^2, \; y=1, \; z=0 \quad x>0, \; y>0, \; z>0$

8.7. Найти координаты центра тяжести плоских однородных пластин, ограниченных заданными линиями $x^2 = 2y, \quad 2x = y^2$

8.8. Найти угол между градиентами скалярных полей $U(x,y,z)$ *è* $V(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$ $U = \frac{yz^2}{x}, \quad V = x^2 - y^2 - 3z^2, \quad M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Контрольная работа №8.
Вариант 6.

8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int_{-1}^{0} dx \int_{4x-4}^{8x^3} f(x,y)dy$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint_D (x+y)dxdy,\ D: y=x^2-1,\ y=-x^2+1$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$

8.4. Вычислить площадь плоских фигур, ограниченных данными линиями $y=2-x^2;\quad y=x$

8.5. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода
$\int_{\angle} \frac{(y^2-x^2)xydl}{(x^2+y^2)^2}$, *где* $\angle$ – *дуга кривой* $r=9\sin 2\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$

8.6. Вычислить площадь части поверхности, уравнение которой задано в условии задач первым, вырезанной другими заданными поверхностями из нее.
$z^2=2xy,\ \ x=y,\ \ x=1,\ \ z=0\ \ x>0,\ y>0,\ z>0$

8.7. Найти моменты инерции плоских однородных фигур, ограниченных заданными линиями $x=0,\ x=2,\ y=0, y=3$ относительно координатных осей

8.8. Найти величину и направление наибольшего изменения скалярного поля $U(M)=U(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ $U(M)=xyz,\quad M_0(0,1,-2)$

Контрольная работа №8.
Вариант 7.

8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int_0^1 dy \int_{8y^3}^{2y+6} f(x,y,)dx$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint_D x(y-1)dxdy,\ \ D: y=5x,\ y=x,\ x=3$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dy$

8.4. Вычислить площадь плоских фигур, ограниченных данными линиями $y=\ln x;\quad y=\ln(2e-x);\quad y=0$

8.5. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода

$\int_{\angle} arctg\frac{y}{x}dl,\quad где\ \angle - дуга\ кардиоиды\ r=2(1+\cos\varphi),\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

8.6. Вычислить площадь части поверхности, уравнение которой задано в условии задач первым, вырезанной другими заданными поверхностями из нее. $x^2\text{-}y^2=2z,\ \ x^2+y^2=3,\ \ y=0,\ \ z=0\ \ x>0,\ y>0,\ z>0$

8.7. Найти моменты инерции плоских однородных фигур, ограниченных заданными линиями $4x^2=9, y=0,\ y=3$ относительно оси $ОУ$.

8.8. Найти величину и направление наибольшего изменения скалярного поля $U(M)=U(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ $U(M)=x^2yz,\quad M_0(2,0,2)$

Контрольная работа №8.
Вариант 8.

8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-2x-6}^{-8x^3} f(x,y)dy$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint\limits_{D}(x-2)dxdy, \quad D: \ y=x, \ \ y=\dfrac{1}{2}x, \ \ x=2$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-\div^2}} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dy$

8.4. Вычислить площадь плоских фигур, ограниченных данными линиями
$xy=3; \quad x+y=4$

8.5. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода
$\int\limits_{\angle}(x+y)dl, \quad где \quad \angle - контур\ треугольника\ с\ вершинами\ A(1,0), \ \ B(0,1), \quad O(0,0)$

8.6. Вычислить площадь части поверхности, уравнение которой задано в условии задач первым, вырезанной другими заданными поверхностями из нее.
$x^2+y^2+z^2=25, \quad z=4$

8.7. Найти моменты инерции плоских однородных фигур, ограниченных заданными линиями $y=3x, \quad y=2x, \quad x=1$ относительно координатных осей

8.8. Найти величину и направление наибольшего изменения скалярного поля $U(M)=U(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ $U(M)=xy^2z, \quad M_0(1,-2,0)$

Контрольная работа №8.
Вариант 9.

8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-8y^3}^{-4y+4} f(x,y)dx$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint\limits_{D} xy\,dxdy,\quad D: y = x^3,\quad y = 0,\quad x = 2$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dy$

8.4. Вычислить площадь плоских фигур, ограниченных данными линиями $y^2 = 2x;\quad 2x + y - 2 = 0$

8.5. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода

$\int\limits_{\angle} (x+y)dl,$ *где* $\angle -$ *дуга лемнискаты Бернулли* $r^2 = \cos 2\varphi,\quad -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

8.6. Вычислить площадь части поверхности, уравнение которой задано в условии задач первым, вырезанной другими заданными поверхностями из нее. $x^2+y^2=y\quad y=2,\quad x=0,\quad z=0,\quad x>0,\quad y>0,\quad z>0$

8.7. Найти моменты инерции плоских однородных фигур, ограниченных заданными линиями $x^2+y^2=4,\quad y=0,\quad y\geq 0$ относительно координатных осей

8.8. Найти величину и направление наибольшего изменения скалярного поля $U(M) = U(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ $U(M) = xyz^2,\quad M_0\ (3,0,1)$

Контрольная работа №8.

Вариант 10.

8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int_0^1 dx \int_{-4x-4}^{-8x^3} f(x,y)dy$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint_D (x+y)dxdy,$

$D: y = x^3, \; y = 8, \; y = 0, \; x = 3$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dy$

8.4. Вычислить площадь плоских фигур, ограниченных данными линиями $y^2 = 2x; \quad 2x + y - 2 = 0$

8.5. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода

$\int_{\angle} ydl, \quad$ *где* $\angle$ *– дуга параболы* $\quad y^2 = 2x,$ *отсеченная параболой* $x^2 = 2y$

8.6. Вычислить площадь части поверхности, уравнение которой задано в условии задач первым, вырезанной другими заданными поверхностями из нее.
$x^2+y^2+z^2=4, \quad x^2+y^2=2y, \quad x=0, \quad x>0, \; , \; z>0$

8.7. Найти моменты инерции плоских однородных фигур, ограниченных заданными линиями $x^2+y^2=9, \; x+y=3, \; x\geq 0, \; y\geq 0$ относительно оси OY

8.8. Найти величину и направление наибольшего изменения скалярного поля $U(M) = U(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ $U(M) = x^2yz^2, \quad M_0 \; (2, 1, -1)$

Контрольная работа №8.
Вариант 11.

8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int_{-1}^{0} dy \int_{4y-4}^{8y^3} f(x, y) dx$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint_D xy^2 dxdy, \quad D: y = x,\ y = 0,\ x = 1$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int_{-3}^{3} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2 + y^2} dy$

8.4. Вычислить площадь плоских фигур, ограниченных данными линиями
$xy = 1; \quad x = y; \quad y = 2$

8.5. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода
$\int\limits_{\angle} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy,$ *где* $\angle -$ *дуга параболы* $y = x^2$ *от точки* $A(1,1)$ *до точки* $B(2,4)$

8.6. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода, используя формулу Остроградского-Гаусса
$\iint_\sigma xdydz + ydz + zdxdy,$ *где* $\sigma -$ *внешняя сторона поверхности эллипсоида* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$

8.7. Найти моменты инерции плоских однородных фигур, ограниченных заданными линиями $2y=x^2$ $y=2$ относительно координатных осей.

8.8. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ соленоидальным
$\vec{a} = x^2 y\vec{i} - 2xy^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$

Контрольная работа №8.
Вариант 12.

8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int_{-5}^{-1} dy \int_{0}^{\sqrt{-6y-y^2}} f(x,y)dx$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint_D e^y dxdy, \quad D: y=\ln x,\ y=0,\ x=2$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_{0}^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dy$

8.4. Вычислить площадь плоских фигур, ограниченных данными линиями
$xy=2; \quad 2x=y; \quad y=1$

8.5. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода
$\int_{\angle} (x^2-1)dy - 2xydx$, *где* $\angle$ *– ломанная с вершинами* $O(0,0),\ B(2,0),\ A(2,1)$

8.6. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода, используя формулу Остроградского-Гаусса
$\iint_\sigma x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, *где* σ *– внешняя сторона поверхности куба* $0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1$

8.7. Доказать, что работа силы $F(P(xy), Q(xy))$ зависит только от начального и конечного положения точки ее приложения и не зависит от формы пути. Вычислить работу при перемещении точки приложения силы из
$M_1(x_1, y_1)$ *в* $M_2(x_2, y_2)$ $P=x, \quad Q=y, \quad M_1(-1,2), \quad M_2(2,3)$

8.8. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ соленоидальным
$\vec{a} = (yz-2x)\vec{i} + (xz+2y)\vec{j} - xy\vec{k}$

Контрольная работа №8.
Вариант 13.

8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int_3^5 dx \int_{-\sqrt{8x-x^2}}^{0} f(x,y)dy$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint_D y(1+x^2)dxdy,\ D: y = x^3,\ y = 3x$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int_0^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \cos(x^2+y^2)dy$

8.4. Вычислить площадь плоских фигур, ограниченных данными линиями
$x^2 + y = 1; \quad x + 1 = 2y$

8.5. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода
$\oint_\angle \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2},$ *где* $\angle$ – *контур треугольника, образованного прямыми* $y = x,\ y = 0$
при положительном направлении обхода контура

8.6. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода, используя формулу Остроградского-Гаусса
$\iint_\sigma x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy,$ *где* σ – *внешняя сторона сферы* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

8.7. Доказать, что работа силы $F(P(xy), Q(xy))$ зависит только от начального и конечного положения точки ее приложения и не зависит от формы пути. Вычислить работу при перемещении точки приложения силы из
$M_1(x_1, y_1)$ *в* $M_2(x_2, y_2)$
P=x-y, Q=y-x, $M_1(1,-1)$, $M_2(1,1)$

8.8. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ соленоидальным
$\vec{a} = (x^2 - z^2)\vec{i} - 3xy\vec{j} + (y^2 + z^2)\vec{k}$

Контрольная работа №8.
Вариант 14.

8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int_{-3}^{-1} dy \int_{-\sqrt{-4y-y^2}}^{0} f(x,y)dx$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint_D xy\,dxdy,\ D: y=\sqrt{x},\ y=0,\ x+y=2$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sin\left(x^2+y^2\right)dy$

8.4. Вычислить площадь плоских фигур, ограниченных данными линиями $x+y^2=1;\quad x+y=1$

8.5. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода
$\oint_\angle \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, *где* $\angle$ *– окружность* $x^2+y^2=4$ *при обходе против часовой стрелки*

8.6. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода, используя формулу Остроградского-Гаусса
$\iint_\sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, *где* σ *– полная поверхность конуса* $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-z^2=0,\ 0\le z\le 1$

8.7. Доказать, что работа силы $F(P(xy),Q(xy))$ зависит только от начального и конечного положения точки ее приложения и не зависит от формы пути. Вычислить работу при перемещении точки приложения силы из $M_1(x_1,y_1)$ *в* $M_2(x_2,y_2)$ *P=2xy, Q=*x^2*, M*$_1$*(0,0), M*$_2$*(2,1)*

8.8. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ соленоидальным
$\vec{a}=2xyz\vec{i}-y(yz+1)\vec{j}+z\vec{k}$

Контрольная работа №8.
Вариант 15.

8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int_1^7 dy \int_0^{\sqrt{8y-y^2}} f(x,y,)dx$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint_D (x^3+3y)dxdy$,

$D: \quad x+y=1, \quad y=x^2-1, \quad x\ge 0$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{tg\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$

8.4. Вычислить площадь плоских фигур, ограниченных данными линиями
$xy=3; \quad x+y=4$

8.5. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода
$\int_{\angle} (x^2-y^2)dx$, *где* $\angle$ – *дуга параболы* $y=x^2$ *от точки* $A(0,0)$ *до точки* $B(2,4)$

8.6. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода, используя формулу Остроградского-Гаусса
$\iint_\sigma xdydz+ydxdz+zdxdy$, *где* σ – *полная поверхность цилиндра* $x^2+y^2=4, \quad -1\le z\le 1$

8.7. Доказать, что работа силы $F(P(xy),Q(xy))$ зависит только от начального и конечного положения точки ее приложения и не зависит от формы пути. Вычислить работу при перемещении точки приложения силы из
$\grave{I}_1(x_1,y_1)$ $\hat{a}$ $M_2(x_2,y_2)$ $P=x^4+4xy^3$, $Q=6x^2y^2-5y^4$, $M_1(-2,-1)$, $M_2(3,0)$

8.8. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ соленоидальным
$\vec{a}=(2x-3y)\vec{i}+2xy\vec{j}-z^2\vec{k}$

Контрольная работа №8.
Вариант 16.

8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int\limits_{1}^{7} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{8y-y^2}} f(x,y,)dx$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint xy^3 dxdy,\ D: y = x^3,\ y \ge 0,\ y = 4x$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} tg\left(x^2 + y^2\right) dy$

8.4. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями
$z = x^2 + y^2; \quad x + y = 1; \quad x \ge 0; \quad y \ge 0; \quad z \ge 0$

8.5. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода
$\int\limits_{\angle} ydx + xdy,$ *где* $\angle -$ *дуга окружности* $x = R\cos t,\ y = R\sin t$ *от точки* $A(1,0)$ *до точки* $B(0,1)$

8.6. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода, используя формулу Остроградского-Гаусса
$\iint\limits_{\sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$ *ãäå* $\sigma -$ *ïîëíàÿ ïîâåðõíîñòü êîíóñà* $x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \le z \le 4$

8.7. Доказать, что работа силы $F(P(xy), Q(xy))$ зависит только от начального и конечного положения точки ее приложения и не зависит от формы пути. Вычислить работу при перемещении точки приложения силы из
Ì $_1(x_1, y_1)$ *â* $M_2(x_2, y_2)$ $P = e^x \cos y, \qquad Q = -e^x \sin y, \qquad M_1(0,0), \quad M_2(1,2)$

8.8. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ потенциальным.
$\vec{a} = (yz - 2x)\vec{i} + (xz + zy)\vec{j} + xy\vec{k}$

Контрольная работа №8.

Вариант 17.

8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int_{-4}^{-2} dx \int_{-\sqrt{-6x-x^2}}^{0} f(x,y)dy$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint_D (x^3+y)dxdy,$

$D: x+y=1,\ \ x+y=2,\ \ x \le 1,\ \ x \ge 0$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным:

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2} dy$$

8.4. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями

$z = 2-(x^2+y^2);\quad x+2y=1;\quad x \ge 0;\ \ y \ge 0;\quad z \ge 0$

8.5. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода

$\int_{\angle} xydx + (y-x)dy,$ ãäå $\angle$ – äóãà ïàðàáîëû $y^2 = x$ îò òî÷êè $\grave{A}(0,0)$ äî òî÷êè $\hat{A}(1,1)$

8.6. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода, используя формулу Остроградского-Гаусса

$\iint_{\sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy,$ ãäå σ – âíåøíÿÿ ñòîðîíà ïîâåðõíîñòè ñôåðû $x^2+y^2+z^2=9$

8.7. Найти функцию $U(x,y)$ по заданному ее полному дифференциалу:

$dU = 4(x^2-y^2)(xdx-ydy)$

8.8. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ потенциальным.

$\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$

Контрольная работа №8.
Вариант 18.

8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{-\sqrt{4y-y^2}}^{0} f(x, y,) dx$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint\limits_{D} (x+1) y^2 dxdy, \quad D: y = 3x^2,\ y = 3$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx$

8.4. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями
$z = x; \quad y = 4; \quad x = \sqrt{25 - y^2}; \quad x \geq 0; \ y \geq 0; \ z \geq 0$

8.5. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода
$\int\limits_{\angle} xydx + (y - x)dy,$ *ãäå∠ − äóãà ïàðàáîëû* $\quad y^2 = x \quad$ *îò òî÷êè* $\quad \hat{A}(0,0)$ *äî òî÷êè* $\quad \hat{A}(1,-1)$

8.6. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода, используя формулу Остроградского-Гаусса
$\iint\limits_{\sigma} 2xdydz - ydxdz + zdxdy, \quad$ *где* $\sigma -$ *поверхность тела* $\quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad 3z \geq x^2 + y^2$

8.7. Найти функцию $U(x, y)$ по заданному ее полному дифференциалу:
$dU = \dfrac{(x + 2y)dx + ydy}{(x + y)^2}$

8.8. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ потенциальным.
$\vec{a} = 6xy\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j} + z\vec{k}$

Контрольная работа №8.
Вариант 19.

8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int\limits_{2}^{6} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{8x-x^2}} f(x,y)dy$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint\limits_{D} (x-y)dxdy,\ D: y = x^2 - 1,\ y = 3$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy$

8.4. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями
$2x + 3y - 12 = 0; \quad 2z = y^2; \quad x \geq 0; \ y \geq 0; \ z \geq 0$

8.5. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода
$\oint\limits_{\angle} ydx - xdy, \quad где\ \angle - замкнутая\ окружность \quad x = 2\cos t,\ \ y = 2\sin t,\ \ 0 \leq t \leq 2\pi$

8.6. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода, используя формулу Остроградского-Гаусса
$\iint\limits_{\sigma} (x^3 + yz)dydz + (y^3 + xz)dxdz + (z^3 + xy)dxdy,\ где\ \sigma\ состоит\ из\ нижней\ полусферы$
$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \quad и\ части\ плоскости \quad z = 0$

8.7. Найти функцию $U(x,y)$ по заданному ее полному дифференциалу:
$$dU = \frac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$$

8.8. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ потенциальным.
$\vec{a} = (2x - yz)\vec{i} + (2x - xy)\vec{j} + yz\vec{k}$

Контрольная работа №8.
Вариант 20.

8.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int_{2}^{4} dy \int_{-\sqrt{6y-y^2}}^{0} f(x,y)dx$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint_D x(y+5)dxdy,$

$D: \quad x=5, \;\; x+y+5=0, \;\; x \le 0$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}$

8.4. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями
$z = x^2 + 2y^2; \quad y = x; \;\; x \ge 0; \;\; y = 1; \;\; z \ge 0$

8.5. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода
$\oint_{\angle} ydx - xdy,$ *ãäå*$\angle -$ *çàìêíóòûé ýëëèïñ* $\quad x = \cos t, \quad y = 3\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

8.6. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода, используя формулу Остроградского-Гаусса
$\iint_{\sigma} x\cos y dydz - \sin y dxdz + (z-1)^2 dxdy,$ *ãäå*$\sigma -$ *âíåøíÿÿ ñòîðîíà ïîëíîé ïîâåðõíîñò è öèëèíäðà*
$x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \le z \le 2$

8.7. Найти функцию $U(x,y)$ по заданному ее полному дифференциалу:
$dU = (2xy^3 - y)dx - (x - 2y - 3x^2y^2)dy$

8.8. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ потенциальным.
$\vec{a} = (y-z)\vec{i} + 3xyz\vec{j} + (z-x)\vec{k}$

Контрольная работа №8.
Вариант 21.

8.1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если границы области интегрирования D ограничены кривыми с уравнениями: $y=\sqrt{x-x^2}, \quad y=\sqrt{3}, \quad x\ge 0$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint\limits_D xy^3dxdy, \quad D: y^2=1-x, \ x\ge 0$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}e^{x^2+y^2}dy$

8.4. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями
$z=y^2; \quad x+y=1; \quad x\ge 0; \ z\ge 0$

8.5. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру $\angle$ $\oint\limits_{\angle}(1-x^2)ydx+x(1+y^2)dy,$ *ãäå∠− îêðóæíîñòü* $x^2+y^2=1$

8.6. Вычислить, используя формулу Стокса или непосредственно криволинейный интеграл 2-го рода и пояснить его физический смысл
$\oint\limits_{\angle} ydx+zdy+xdz,$ *ãäå∠− îêðóæíîñòü* $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+y+z=0\end{cases}$

8.7. Найти функцию $U(x,y)$ по заданному ее полному дифференциалу:
$dU=e^{\frac{x}{y}}\left(1+\frac{x}{y}\right)dx-\frac{x^2}{y^2}e^{\frac{x}{y}}dy$

8.8. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ потенциальным.
$\vec{a}=(y-z)i+(x+z)\vec{j}+(x^2-y^2)\vec{k}$

Контрольная работа №8.
Вариант 22.

8.1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если границы области интегрирования D ограничены кривыми с уравнениями: $x^2 = 2y, \quad 5x - 2y - 6 = 0$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint\limits_D y(1-x)dxdy, \ D: y^3 = x, \ y = x$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{9-x}} \ln(1 + x^2 + y^2)dy$

8.4. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями $z = 2x^2 + y^2; \quad x + y = 1; \quad x \ge 0; \ y \ge 0; \ z \ge 0$

8.5. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру $\angle \oint\limits_{\angle} (x+y)dx - (x-y)dy, \quad где\ \angle - эллипс \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

8.6. Вычислить, используя формулу Стокса или непосредственно криволинейный интеграл 2-го рода и пояснить его физический смысл
$\oint\limits_{\angle} (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz, \quad где\ \angle - окружность \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

8.7. Найти функцию $U(x,y)$ по заданному ее полному дифференциалу: $dU = (x+y)dx + (x - y^2)dy$

8.8. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ потенциальным. $\vec{a} = (x+y)\vec{i} - 2xz\vec{j} - 3(y+z)\vec{k}$

Контрольная работа №8.
Вариант 23.

8.1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если границы области интегрирования D ограничены кривыми с уравнениями: $x=\sqrt{8-y^2},\quad y=0,\quad y\ge 0$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy,\ D: x=2,\ y=x,\ \ xy=1$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат

к полярным: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+x^2+y^2}$

8.4. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями
$x^2+y^2=1;\quad z=2-x^2-y^2;\quad z\ge 0$

8.5. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру $\angle$
$\oint\limits_{\angle} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xydx+\sin 2xydy),\quad$ *ãäå∠ − îêðóæíîñòü* $\quad x^2+y^2=4$

8.6. Вычислить, используя формулу Стокса или непосредственно криволинейный интеграл 2-го рода и пояснить его физический смысл

$\oint\limits_{\angle}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz,\quad$ *ãäå ∠ − ýëëèïñ* $\quad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+\frac{z}{2}=1 \end{cases}$

8.7. Найти массу однородного тела, ограниченного данными поверхностями, считая его плотность $\rho=1\ \ x^2+y=3,\quad 2y-z=0,\quad z=0$

8.8. Выяснить, является ли векторное поле $\vec a=P\vec i+Q\vec j+R\vec k$ потенциальным.
$\vec a=z^2\vec i+(xz+y)\vec j+x^2y\vec k$

Контрольная работа №8.
Вариант 24.

8.1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если границы области интегрирования D ограничены кривыми с уравнениями:
$x^2 = -y, \quad x = \sqrt{1-y^2}, \quad y \le 0$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}} dxdy,\ D: x = y^2,\ x = 0,\ y = 1$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} 1 - x^2 - y^2 dx$

8.4. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями
$z^2 = 4 - z; \quad x^2 + y^2 = 4x; \quad z \ge 0$

8.5. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру $\angle$ $\oint\limits_{\angle} (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy, \quad ãäå \angle - ýëëèïñ \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

8.6. Вычислить, используя формулу Стокса или непосредственно криволинейный интеграл 2-го рода и пояснить его физический смысл
$\oint\limits_{\angle} z^2 dx + x^2 dy + y^2 dz, \quad ãäå\ \angle - îêðóæíîñòü \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

8.7. Найти массу однородного тела, ограниченного данными поверхностями, считая его плотность $\rho = 1$ $x - y - z = 0, \quad x - 4 = 0, \quad z = 0$

8.8. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ потенциальным.
$\vec{a} = xy(3x - 4y)\vec{i} + x^2(x - 4y)\vec{j} + 3z^2\vec{k}$

Контрольная работа №8.
Вариант 25.

8.1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если границы области интегрирования D ограничены кривыми с уравнениями: $y=-x,\quad 3x+y=3,\quad y=3$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint\limits_D (x-y)dxdy,\ D: y=0,\ \ y=x,\ \ x+y=2$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\ ctg\sqrt{x^2+y^2}}$

8.4. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями
$y=x^2;\quad x=y^2;\quad z=3x+2y+6;\quad z=0$

8.5. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру
$\oint\limits_{\angle}^{\angle} \sqrt{x^2y^2}\,dx + y\left(xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy,$ ãäå $\angle -$ êîíòóð ïðÿìîóãîëüíèêà ñ âåðøèíàìè $\grave{A}(3,2),$ $B(6,2), C(6,4), D(3,4)$

8.6. Вычислить, используя формулу Стокса или непосредственно криволинейный интеграл 2-го рода и пояснить его физический смысл
$\oint\limits_{\angle}(3x-1)dx+(y-x+z)dy+4zdz,$ ãäå $\angle -$ êîíòóð $\Delta\grave{A}\hat{A}\tilde{N},$ à åãî âåðøèíû $\grave{A},\hat{A},\tilde{N} -$ òî÷êè ïåðåñå÷å$-$íèÿ ïëîñêîñòè $2x-y-2z+2=0$ ñ îñÿìè OX,OY,OZ

8.7. Найти функцию $U(x,y)$ по заданному ее полному дифференциалу:
$x^2+y-4=0,\quad y-2z=0,\quad z=0$

8.8. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ потенциальным.
$\vec{a}=6x^2\vec{i}+3\cos(3x+2z)\vec{j}+\cos(3y+2z)\vec{k}$

Контрольная работа №8.
Вариант 26.

8.1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если границы области интегрирования D ограничены кривыми с уравнениями: $x+2y-6=0,\quad y=0,\quad y\geq 0$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint\limits_D (x+y)dxdy,$

$D:\ \ y=x,\ \ y=2-x^2,\ \ x=0,\ \ x=1$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\iint\limits_D \frac{xdxdy}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad D:\ \ x^2+y^2=4,\quad x^2+y^2=16,\quad x\geq 0,\quad y\geq 0$

8.4. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями
$y=x^2;\quad x=y^2;\quad z=3x+2y+6;\quad z=0$

8.5. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру $\angle$ $\oint\limits_{\angle} xy^2dy-x^2ydx,$ ãäå $\angle -$ îêðóæíîñòü $x^2+y^2=1$

8.6. Вычислить, используя формулу Стокса или непосредственно криволинейный интеграл 2-го рода и пояснить его физический смысл
$\oint\limits_{\angle} xydx+yzdy+xzdz,$ ãäå $\angle -$ ëèíèÿ ïåðåñå÷åíè ÿ ïîâåðõíîñò è $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2+z=1 \end{cases}$

8.7. Найти массу однородного тела, ограниченного данными поверхностями, считая его плотность $\rho=1$ $x-y+z=0,\quad y-4=0,\quad x=0,\quad z=0$

8.8. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ гармоническим
$\vec{a}=x^2z\vec{i}+y^2\vec{j}-xz^2\vec{k}$

Контрольная работа №8.
Вариант 27.

8.1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если границы области интегрирования D ограничены кривыми с уравнениями: $y=-3-x^2, \quad y=x$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint\limits_D (x-y)dxdy,\ D: y^2 = x+2,\ y-x=0$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\iint\limits_D \frac{ydxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad D: \ x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=9, \quad y \geq 0,$

8.4. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями
$z=2x^2+y^2; \quad y \leq x; \quad y=3x; \quad x=2; \quad z \geq 0$

8.5. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру $\angle$
$\oint\limits_{\angle} (x+y)^2 dx - (x^2+y^2)dy$, ãäå $\angle$ – êîíòóð òðåóãîëüíèê êà ñ âåðøèíàìè $\grave{A}(1,1), \hat{A}(3,2), \tilde{N}(2,5)$

8.6. Вычислить, используя формулу Стокса или непосредственно криволинейный интеграл 2-го рода и пояснить его физический смысл
$\oint\limits_{\angle} x^3dx + y^3dy + z^3dz$, ãäå $\angle$ – ëèíèÿ ïåðåñå÷åíèÿ öèëèíäðà è ïëîñêîñòè $\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z+y=2 \end{cases}$

8.7. Найти массу однородного тела, ограниченного данными поверхностями, считая его плотность $\rho = 1 \ \ x^2+y-2=0, \quad 3y-2z=0, \quad z=0$

8.8. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ гармоническим
$\vec{a} = (x+y)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x+z)\vec{k}$

Контрольная работа №8.
Вариант 28.

8.1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если границы области интегрирования D ограничены кривыми с уравнениями: $y \ge 0, \quad x = \sqrt{y}, \quad y = \sqrt{8 - x^2}$.

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint\limits_D x^2 y\, dxdy,\ D: y = x^2,\ \ x = y^2$.

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\iint\limits_D e^{x^2+y^2} dxdy, \qquad D: \ \ x^2 + y^2 \le 1$

8.4. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями
$y^2 + 4z^2 = 4; \quad y = 2x; \quad x = 0; \quad z = 0$

8.5. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру $\angle$
$\oint\limits_{\angle} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy,$ *где* $\angle -$ *контур треугольника с вершинами* $A(0,0), B(1,0), C(0,1)$

8.6. Вычислить, используя формулу Стокса или непосредственно криволинейный интеграл 2-го рода и пояснить его физический смысл
$\oint\limits_{\angle} ydx - xdy + zdz,$ *ãäå* $\angle -$ *ëèíèÿ ïåðåñå÷åíè ÿ ñôåðû è êîíóñà* $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = z^2, \qquad z \ge 0 \end{cases}$

8.7. Найти массу однородного тела, ограниченного данными поверхностями, считая его плотность $\rho = 1 \ \ 3y + z = 0, \quad x + y = 0, \quad x - 2 = 0, \quad z = 0$

8.8. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ гармоническим
$\vec{a} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$

Контрольная работа №8.
Вариант 29.

8.1. Представить двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если границы области интегрирования D ограничены кривыми с уравнениями: $x=\sqrt{2-y^2}, \quad x=y^2, \quad y\ge 0$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint_D xy\,dxdy, \;\; D: y=x^2, \;\; y^2=x$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным:

$$\iint_D \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \quad D: \;\; \frac{\pi^2}{4} \le x^2+y^2 \le 4\pi^2$$

8.4. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями
$9y^2+x^2=9; \quad z=3y; \quad x=0; \quad z=0$

8.5. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру $\angle \oint_{\angle} ydx-xdy, \;\; \textit{ãäå} \angle - \textit{äóãà ýëëèïñà} \quad x=2\cos t, \; y=3\sin t, \; 0\le t\le 2\pi$

8.6. Вычислить, используя формулу Стокса или непосредственно криволинейный интеграл 2-го рода и пояснить его физический смысл

$$\oint_{\angle} z^2dy+x^2dz, \quad \textit{где } \angle - \textit{линия пересечения цилиндра и плоскости} \begin{cases} y^2+z^2=9 \\ 3z+4x=5 \end{cases}$$

8.7. Найти массу однородного тела, ограниченного данными поверхностями, считая его плотность $\rho=1 \;\; x^2+y-1=0, \quad y-2z=0, \quad z=0$

8.8. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ гармоническим.
$\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$

Контрольная работа №8.
Вариант 30.

8.1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если границы области интегрирования D ограничены кривыми с уравнениями: $y = x^2 - 2, \quad y = x^2$

8.2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint\limits_D xy^2 dxdy,\ D: x^2 + y^2 = 4,\ x + y - 2 = 0$

8.3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy, \quad D: \ \dfrac{\pi^2}{4} \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2$

8.4. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями
$x^2 + y^2 = 9; \quad z = \dfrac{y}{3}; \quad z = o; \quad y \ge 0; \quad z \ge 0$

8.5. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру $\angle$ $\oint\limits_{\angle} xy^2 dy - x^2 ydx,$ $ãäå\angle - îêðóæíîñòü$ $\quad x^2 + y^2 = 4$

8.6. Вычислить, используя формулу Стокса или непосредственно криволинейный интеграл 2-го рода и пояснить его физический смысл
$\oint\limits_{\angle} xzdx + xydy + yzdz,$ *где* $\angle -$ *линия пересечения цилиндра и плоскости* $\begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

8.7. Найти массу однородного тела, ограниченного данными поверхностями, считая его плотность $\rho = 1 \ \ x - 3y = 0, \quad 2x - z = 0, \quad y - 2 = 0, \quad z = 0$

8.8. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ гармоническим
$\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$