Контрольная работа по дискретной математике с решением

Задание 1

Докажите тождество

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Доказательство.

Для доказательства тождества воспользуемся методом математической индукции.

Пусть $n = 1$, тогда равенство примет вид:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4};$$

$$6 = 6.$$

Равенство выполняется.

Предположим, что равенство верно для некоторого натурального числа n=k, то есть, выполняется равенство:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}.$$

Проверим, будет ли выполняться при этом равенство для числа $k+1$, то есть, будет ли выполнено равенство

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

Левая часть равенства при $n = k + 1$ имеет вид:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + ... + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3).$$

Поскольку $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + ... + k(k+1)(k+2) = \dfrac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$, то

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + ... + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) =$$

$$\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)}{4} =$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)}{4} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$. Таким образом,

равенство

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + ... + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

выполнено.

Таким образом, исходное равенство выполняется при $n = 1$ и выполняется при $n = k + 1$ в предположении, что оно имеет место при $n = k$, следовательно, исходное равенство верно при любом значении k, что и требовалось доказать.

Задание 2

В ресторане из напитков предлагают кофе, чай, молоко и колу. Предлагают на выбор суп и салат. Имеются 10 различных бифштексов и 5 разнообразных куриных блюд. На гарнир можно выбрать картофель фри, печеный картофель, макароны с рисом или сыр. На десерт подают сладкий пирог, мороженное или то и другое вместе.

а) Сколько можно составить различных меню?

б) Сколько можно составить меню, включающий бифштекс?

в) Сколько можно составить различных меню, если клиент выбирает бифштекс и картофель или не выбирает ни то, ни другое?

Решение.

По условию, в ресторане из напитков предлагают кофе, чай, молоко или колу, то есть, всего 4 варианта напитков. Предлагают на выбор суп или салат, то есть, 2 варианта первого блюда. Имеются 10 различных бифштексов и 5 разнообразных куриных блюд, то есть, 15 вариантов второго блюда. На гарнир можно выбрать картофель фри, печеный картофель, макароны с сыром или рис, то есть 4 вариант гарнира. На десерт подают сладкий пирог, мороженое или и то и другое вместе, то есть возможны 3 варианта.

а) Предполагается, что заказ обязательно состоит из одного вида напитка (4 варианта), одного вида первого блюда (2 варианта), одного вида второго блюда (всего 15 вариантов), одного вида гарнира (4 варианта) и одного вида десерта (3 варианта).

Один напиток из четырех можно выбрать $C_4^1=4$ способами, одно первое блюдо из двух можно выбрать $C_2^1=2$ способами, одно второе блюдо из 15 можно выбрать $C_{15}^1=15$ способами, один гарнир из четырех можно выбрать $C_4^1=4$ способами, один десерт из трех можно выбрать $C_3^1=3$ способами. Тогда всего, по правилу произведения, можно составить $C_4^1\cdot C_2^1\cdot C_{15}^1\cdot C_4^1\cdot C_3^1=4\cdot 2\cdot 15\cdot 4\cdot 3=1440$ различных меню.

б) По условию, меню включает бифштекс, то есть, второе блюдо может быть только одно.

Заказ состоит из одного вида напитка (4 варианта), одного вида первого блюда (2 варианта), одного вида второго блюда (всего 1 вариант), одного вида гарнира (4 варианта) и одного вида десерта (3 варианта).

Один напиток из четырех можно выбрать $C_4^1 = 4$ способами, одно первое блюдо из двух можно выбрать $C_2^1 = 2$ способами, одно второе блюдо из 1 можно выбрать $C_1^1 = 1$ способом, один гарнир из четырех можно выбрать $C_4^1 = 4$ способами, один десерт из трех можно выбрать $C_3^1 = 3$ способами. Тогда всего, по правилу произведения, можно составить $C_4^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 = 96$ различных меню, включающих бифштекс.

в) По условию, клиент выбирает бифштекс и картофель или не выбирает ни то, ни другое.

Выясним, сколько различных меню можно составить, если клиент выбирает бифштекс и картофель. В этом случае второе блюдо может быть только одно, и гарнир может быть только одним.

Заказ состоит из одного вида напитка (4 варианта), одного вида первого блюда (2 варианта), одного вида второго блюда (всего 1 вариант), одного вида гарнира (всего 1 вариант) и одного вида десерта (3 варианта).

Один напиток из четырех можно выбрать $C_4^1 = 4$ способами, одно первое блюдо из двух можно выбрать $C_2^1 = 2$ способами, одно второе блюдо из 1 можно выбрать $C_1^1 = 1$ способом, один гарнир из одного можно выбрать $C_1^1 = 1$ способом, один десерт из трех можно выбрать $C_3^1 = 3$ способами. Тогда всего , по правилу произведения, можно составить $N = C_4^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 \cdot C_1^1 \cdot C_3^1 = 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 24$ различных меню, включающих бифштекс и картофель фри.

Выясним, сколько различных меню можно составить, если клиент не выбирает ни бифштекс, ни картофель. В этом случае вторых блюд может быть 15-1=14, и гарниров может быть 4-1=3.

Заказ состоит из одного вида напитка (4 варианта), одного вида первого блюда (2 варианта), одного вида второго блюда (всего 14 вариантов), одного вида гарнира (3 варианта) и одного вида десерта (3 варианта).

Один напиток из четырех можно выбрать $C_4^1 = 4$ способами, одно первое блюдо из двух можно выбрать $C_2^1 = 2$ способами, одно второе блюдо из четырнадцати можно выбрать $C_{14}^1 = 14$ способами, один гарнир из трех можно выбрать $C_3^1 = 3$ способами, один десерт из трех можно выбрать $C_3^1 = 3$ способами. Тогда всего, по правилу произведения, можно составить $M = C_4^1 \cdot C_2^1 \cdot C_{14}^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 = 4 \cdot 2 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 3 = 1008$ различных меню, не включающих ни бифштекс, ни картофель фри одновременно.

Искомое число различных меню, по правилу суммы, равно $N + M = 24 + 1008 = 1032$.

Ответ: а) 1440 вариантов; б) 96 вариантов; в) 1032 варианта.

Задание 3

Пять пар идут в кино. Сколькими способами они могут занять места, если

а) они могут сидеть в любом порядке?

б) все пять пар сидят подряд.

Решение.

а) По условию, в кино идут пять пар, то есть, 10 человек. Они могут занять свои места в произвольном порядке. Тогда число N способов, которыми они могут занять свои места, равно числу перестановок из 10 элементов, то есть,

$$N = P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800 .$$

б) По условию, в кино идут пять пар. Они занимают места так, что все пять пар сидят подряд. Пусть каждой паре (a_i, b_i) соответствуют номера мест $(n_j,\ m_j)$ ($i,\ j = 1,2,3,4,5$).

Рассмотрим случай, когда каждая пара (a_i, b_i) занимает свои места таким образом, что человек a_i сидит левее b_i. Тогда некоторому элементу $c_i = (a_i, b_i)$ соответствует место $g_j = (n_j, m_j)$, $i, j = 1,2,3,4,5$. Тогда число N способов, которыми элементы c_i могут занять свои места g_j, равно числу перестановок из 5 элементов, то есть,

$$N = P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Каждая пара ((a_i, b_i)) при каждой перестановке может занять свои места двумя способами ($(a_i, b_i), (b_i, a_i)$). Всего 5 пар, значит, по правилу произведения, они могут занять свои места

$$M = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$

способами при каждой перестановке. Всего перестановок *N*=120, значит, искомое число способов, которыми зрители могут занять свои места, если все пять пар сидят подряд, равно

$$NM = 120 \cdot 2^5 = 3840.$$

Ответ: а) 3628800; б) 3840.

Задание 4

Найдите производящую функцию, в которой коэффициент при x^r описывает количество решений уравнения

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r,$$

где $e_i \ge i$ *для всех i.*

Решение.

По определению, производящая функция имеет вид:

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots.$$

Здесь, согласно условию, коэффициент при x^r описывает количество решений уравнения

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r,$$

где $e_i \ge i$ для всех i.

Рассмотрим соотношение $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r$. По условию, $e_i \ge i$ для всех *i,* то есть, $e_1 \ge 1,\ e_2 \ge 2, e_3 \ge 3, e_4 \ge 4$, значит, минимальное значение r, при котором существуют решения уравнения $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r$, равно 10 (1+2+3+4=10). Это означает, что $a_n = 0,\ 0 \le n \le 9$.

Пусть $r = 10$, тогда есть единственное решение уравнения $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 10$. Это набор (1,2,3,4). Это означает, что $a_{10} = 1$.

Пусть $r = 11$, тогда представить число 11 суммой $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ можно, увеличив один элемент из набора (1,2,3,4) на единицу. Таких наборов может быть только 4 (C_4^1). Это наборы (2,2,3,4), (1,3,3,4), (1,2,4,4), (1,2,3,5). Это означает, что $a_{11} = 4$.

Пусть $r = 12$. Представить число 12 суммой $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ можно, увеличив один элемент из набора (1,2,3,4) на два или увеличив два каких либо элемента на единицу. Таких наборов может быть 10 ($C_4^2 + C_4^1$). Это наборы (3,2,3,4), (1,4,3,4), (1,2,5,4), (1,2,3,7), (2,3,3,4), (2,2,4,4), (2,2,3,5), (1,3,4,4), (1,3,3,5), (1,2,4,5). Это означает, что $a_{12} = 10$.

Пусть $r = 13$. Представить число 13 суммой $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ можно, увеличив один элемент из набора (1,2,3,4) на три или увеличив один какой-то элемент на 1, а другой – на 2, или увеличив три каких либо элементов на единицу. Таких наборов может быть $C_4^1 + C_4^2 + C_4^2 + C_4^2 = 4 + 6 + 6 + 4 = 20$. Это означает, что $a_{13} = 20$.

Пусть $r \ge 14$. Представить число r суммой $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ следующими способами:

1) Увеличив каждое число из набора (1,2,3,4) на такие натуральные числа, сумма которых равна $r - 10$. По теореме, число различных разложений натурального числа n в сумму k натуральных чисел равно C_{n-1}^{k-1}. В нашем случае $n = r - 10,\ k = 4$. Тогда число таких вариантов равно $C_{r-10-1}^{4-1} = C_{r-9}^3$.

2) Увеличив только три каких-либо числа из набора (1,2,3,4) на такие натуральные числа, сумма которых равна $r - 10$. По теореме, число различных разложений натурального числа n в сумму k натуральных чисел равно C_{n-1}^{k-1}. В нашем случае $n = r - 10,\ k = 3$. Тогда число таких вариантов равно $C_{r-10-1}^{3-1} = C_{r-9}^2$. Поскольку выбрать три элемента, которые нужно увеличить, из четырех можно $C_4^3 = 4$ способами, то общее число наборов, удовлетворяющих уравнению $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r$, в этом случае равно

$$C_{r-9}^2 \cdot C_4^3 = 4C_{r-9}^2 = 4(r-9)(r-9-1) = 4(r-9)(r-8).$$

3) Увеличив только два каких-либо числа из набора (1,2,3,4) на такие натуральные числа, сумма которых равна $r - 10$. По теореме, число различных разложений

натурального числа n в сумму k натуральных чисел равно C_{n-1}^{k-1}. В нашем случае $n = r - 10,\ k = 2$. Тогда число таких вариантов равно $C_{r-10-1}^{2-1} = C_{r-9}^{1}$. Поскольку выбрать два элемента, которые нужно увеличить, из четырех можно $C_4^2 = 6$ способами, то общее число наборов, удовлетворяющих уравнению $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r$, в этом случае равно $C_{r-9}^1 \cdot C_4^2 = 6C_{r-9}^1 = 6(r-9)$.

4) Увеличив только одно число из набора (1,2,3,4) на $r-10$. Число таких вариантов равно 4.

Таким образом, при $r \ge 14$ общее число наборов, удовлетворяющих уравнению $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r$, равно $C_{r-9}^3 + C_{r-9}^2 \cdot C_4^3 + C_{r-9}^1 \cdot C_4^2$+4. То есть,

$$a_r = C_{r-9}^3 + C_{r-9}^2 \cdot C_4^3 + C_{r-9}^1 \cdot C_4^2 + 4,\ r \ge 14.$$

Производящая функция имеет вид:

$$A(x) = x^{10} + 4x^{11} + 10x^{12} + 20x^{13} + \sum_{r=14}^{\infty} \left(C_{r-9}^3 + C_{r-9}^2 \cdot C_4^3 + C_{r-9}^1 \cdot C_4^2 + 4 \right) x^r .$$

<u>Ответ</u>: $A(x) = x^{10} + 4x^{11} + 10x^{12} + 20x^{13} + \sum_{r=14}^{\infty} \left(C_{r-9}^3 + C_{r-9}^2 \cdot C_4^3 + C_{r-9}^1 \cdot C_4^2 + 4 \right) x^r$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ерош И.Л. Дискретная математика. Комбинаторика: Учеб.пособие/СПбГУАП.СПб., 2001. – 37 с.

http://www.mat.net.ua/mat/biblioteka/Erosh-Discretnaya-matematika.pdf

[2] Ландо С. К. Л22 Лекции о производящих функциях. — 3-е изд., испр. — М.: МЦНМО, 2007. — 144 с.

http://www.mccme.ru/free-books/lando/lando-genfunc.pdf