Линейное программирование
Решение ЗЛП с анализом

1. Условие задачи.

Ресторан торгует порционными мясными пирогами и чизбургерами. На порцию мясного пирога идет четверть фунта мяса, а на чизбургер только 0,2 фунта. В начале рабочего дня в ресторане имеется 200 фунтов мяса. Ресторан имеет доход 20 центов от одной порции мясного пирога и 15 центов от одного чизбургера. Ресторан не может продать в день более 900 порционных блюд. Какова должна быть доля чизбургеров, чтобы максимизировать доход ресторана?

2. Математическая модель задачи.

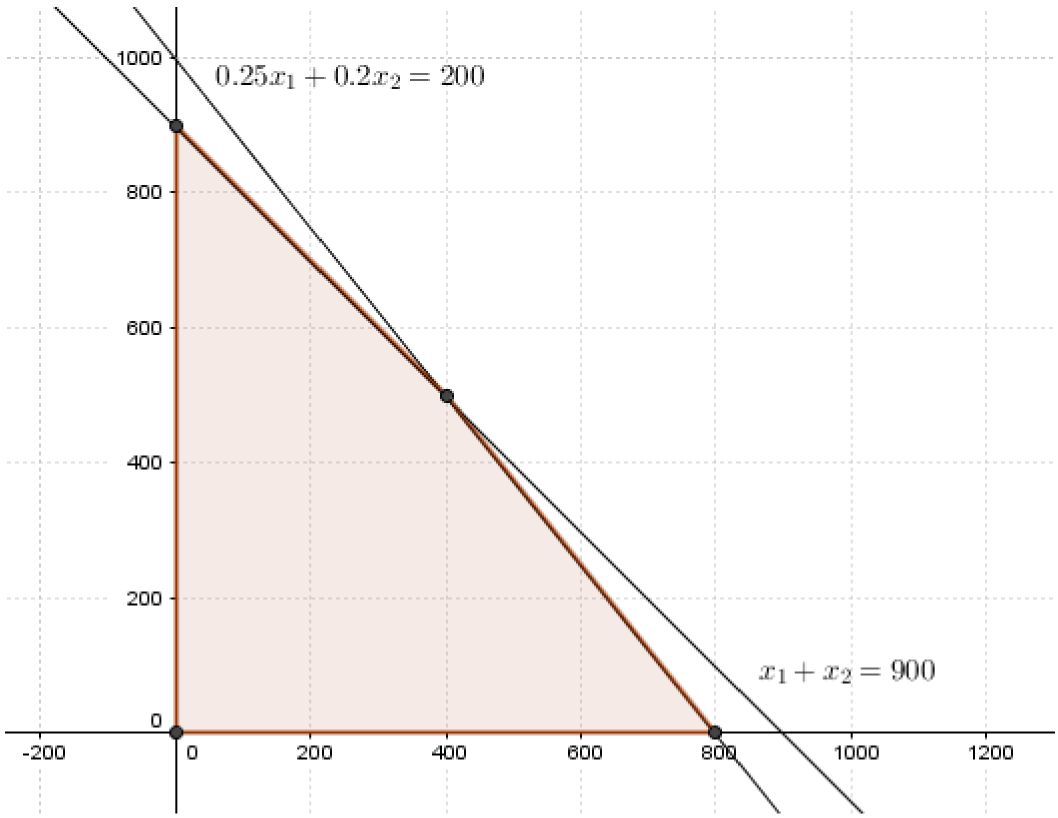
Пусть планируется продавать x_1 мясных пирогов и x_2 чизбургеров. Исходя из смысла переменных, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. Суммарный расход мяса на производство всей продукции составит $0.25x_1 + 0.2x_2$ фунтов, что не должно превышать запас в 200 фунтов: $0.25x_1 + 0.2x_2 \leq 200$. Суммарное количество блюд составит $x_1 + x_2$, что не должно превышать допустимый максимум в 900 блюд: $x_1 + x_2 \leq 900$. Суммарный доход составит $0.2x_1 + 0.15x_2$ долларов. Цель задачи - максимизировать доход. Получим задачу линейного программирования:

$$f(X) = 0.2x_1 + 0.15x_2 \to max$$

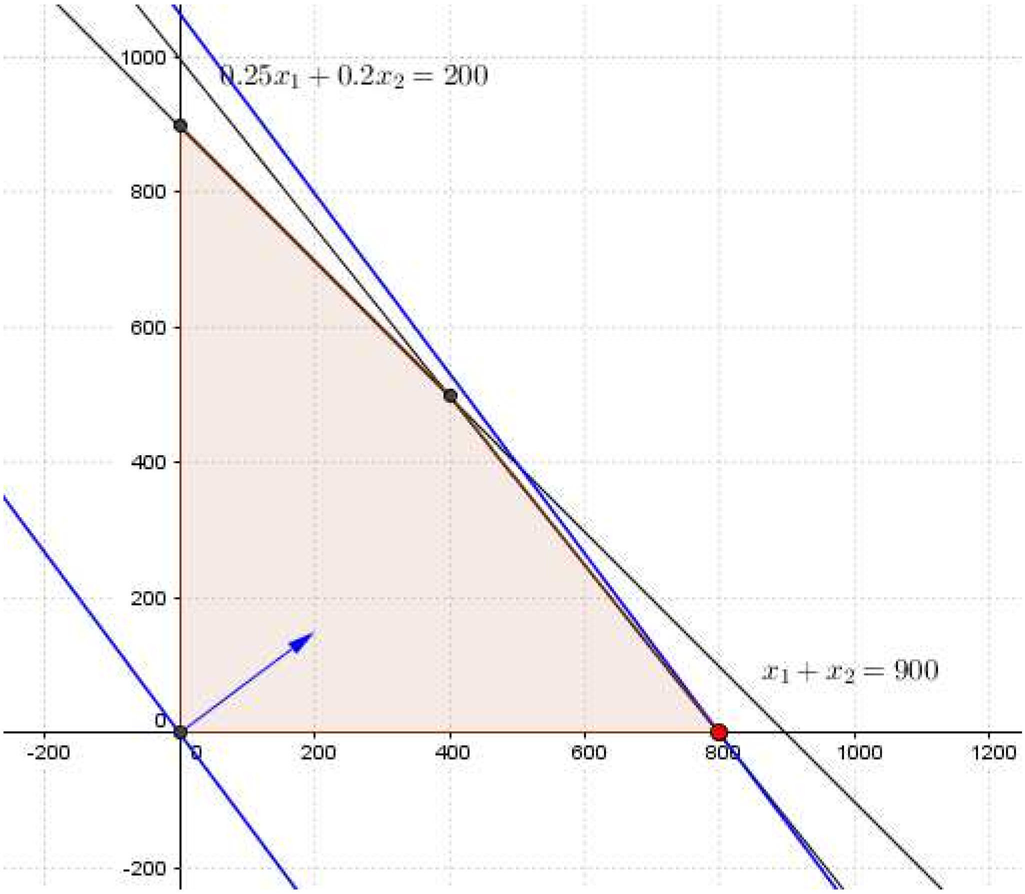
$$\begin{cases} 0.25x_1 + 0.2x_2 \leq 200 \\ x_1 + x_2 \leq 900 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. Решение задачи геометрическим методом.

Каждое неравенство системы ограничений определяет полуплоскость, ограниченную соответствующей прямой. В системе координат x_1Ox_2 построим прямые $0.25x_1 + 0.2x_2 = 200$ и $x_1 + x_2 = 900$. Определим, какую из полуплоскостей задает каждое из неравенств системы. Определим область допустимых решений (ОДР) - часть пересечения этих полуплоскостей, лежащую в первой координатной четверти:



Построим линию уровня - прямую $0.2x_1 + 0.15x_2 = 0$ и будем перемещать ее в направлении вектора-градиента целевой функции: $\bar{c} = grad\ f = (0.2; 0.15)$. Последняя точка ОДР, которую при этом пересечет линия уровня - точка оптимального решения:



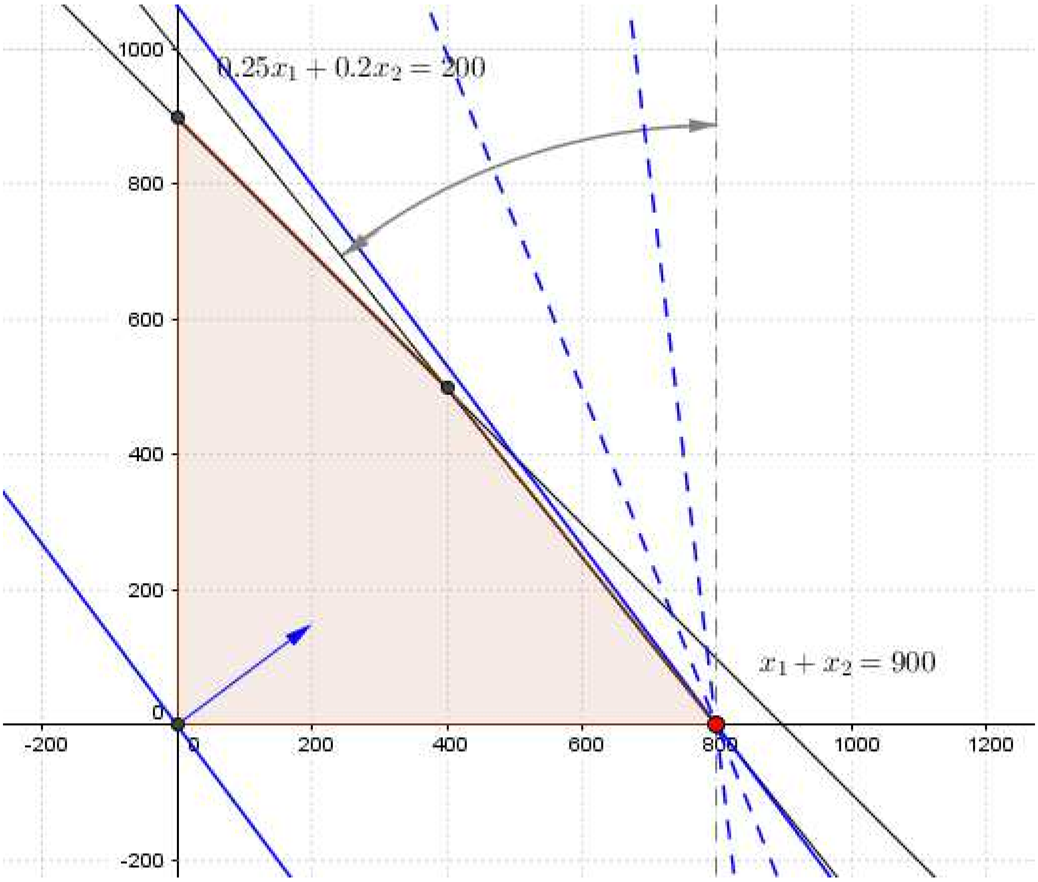
Итак, оптимальное решение задачи: $x_1 = 800; x_2 = 0$; $f(X) = 0.2 \cdot 800 + 0.15 \cdot 0 = 160$.

4. Анализ оптимального решения на чувствительность.

4.1. Изменение коэффициентов целевой функции при неизменной структуре оптимального решения.

Определим интервалы изменения коэффициентов целевой функции, при которых структура оптимального решения останется неизменной.

Точка оптимального решения не изменится, если линия уровня будет изменять наклон от прямой $0.25x_1 + 0.2x_2$ до прямой $x_1 = 600$, как это показано на рисунке:



При изменении коэффициента целевой функции при x_1: $f = c_1 x_1 + 0.15x_2$ точка $X^*(800;0)$ останется точкой оптимального решения до тех пор, пока угол наклона линии f будет больше, чем угол наклона прямой $0.25x_1 + 0.2x_2$, но меньше, чем угол наклона линии $x_1 = 800$ (то есть $90°$)

Алгебраически это можно записать следующим образом:

$$\frac{0.25}{0.2} \le \frac{c_1}{0.15} < \frac{800}{0}$$

Итак, интервал коэффициента целевой функции при x_1 (коэффициент при x_2 неизменен), при котором структура оптимального решения останется неизменной:

$$c_1 \in [0.1875; +\infty)$$

Для коэффициента c_2 (при неизменном $c_1 = 0.2$) аналогично получим:

$$\frac{0}{800} \le \frac{c_2}{0.2} \le \frac{0.2}{0.25}$$

Итак, интервал коэффициента целевой функции при x_2 (коэффициент при x_1 неизменен), при котором структура оптимального решения останется неизменной:

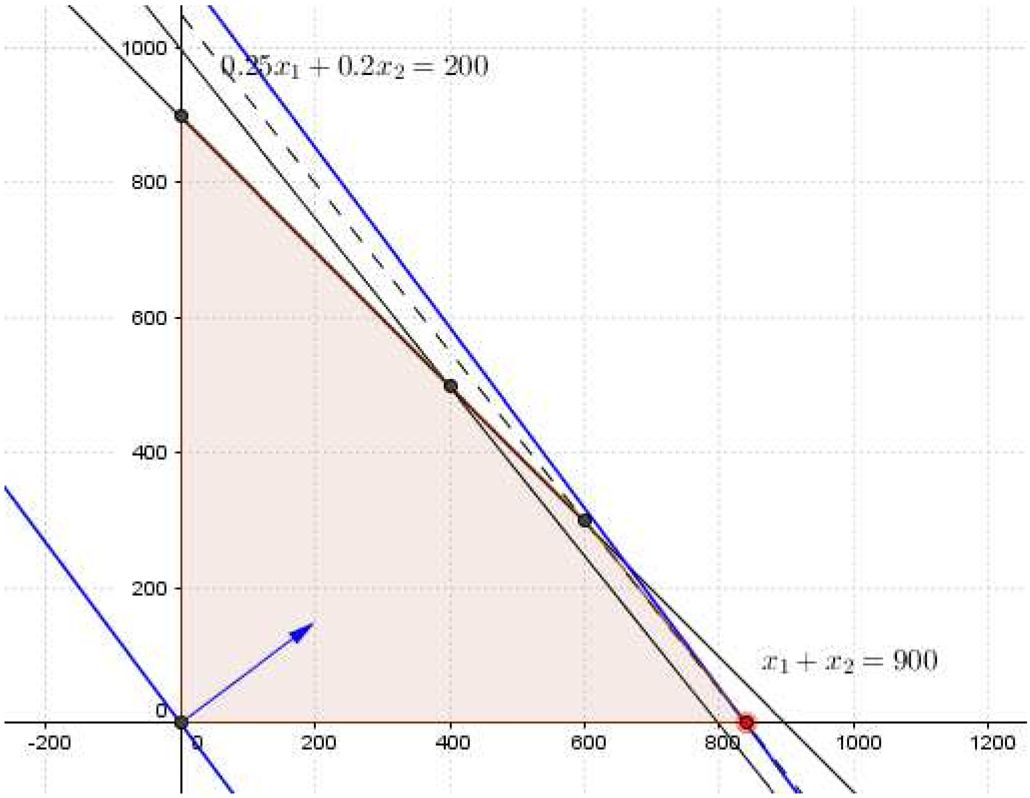
$$c_2 \in [0; 0.16]$$

4.2. Статус и ценность каждого ресурса.

Определим статус, ценность каждого ресурса и его приоритет при решении задачи увеличения запаса ресурсов.

Точка оптимального решения лежит на пересечении прямых $0.25x_1 + 0.2x_2 = 200$ (ограничение на расход мяса) и $x_2 = 0$. Таким образом, дефицитным ресурсом является мясо. Ограничение на число блюд - избыточное.

При увеличении запаса дефицитного ресурса (мяса) на 10 единиц получим:



Точка оптимального решения - пересечение прямых $0.25x_1 + 0.2x_2 = 210$ и $x_2 = 0$, оптимальное решение: $x_1 = 840; x_2 = 0$, $f(840; 0) = 0.2 \cdot 840 + 0.15 \cdot 0 = 168$. Итак, увеличение запаса дефицитного ресурса на 10 единиц дает увеличение прибыли на 8 единиц. Увеличение за дефицитного ресурса на единицу дает увеличение прибыли 0,8 единиц, то есть теневая стоимость дефицитного ресурса равна 0,8.

Увеличение запаса избыточного ресурса не увеличит целевую функцию, теневая стоимость избыточного ресурса равна 0.

4.3. Интервал изменения запасов каждого из ресурсов, при котором сохраняется структура оптимального решения.

Увеличивать дефицитный ресурс без изменения структуры оптимального решения можно, пока прямая $0.25x_1 + 0.2x_2 = b_1$ не дойдет до точки $(900; 0)$ - после этого ресурс станет избыточным. Максимальное возможное значение: $0.25 \cdot 900 + 0.2 \cdot 0 = 225$.

Уменьшать избыточный ресурс без изменения структуры оптимального решения можно, пока прямая $x_1 + x_2$ не пройдет через точку $(800; 0)$ - после этого ресурс станет дефицитным. Минимально возможное значение: $800 + 0 = 800$.

Итак, дефицитный ресурс можно увеличить на 25 единиц, избыточный - уменьшить на 100 единиц.

5. Нахождение оптимального решения в Excel.

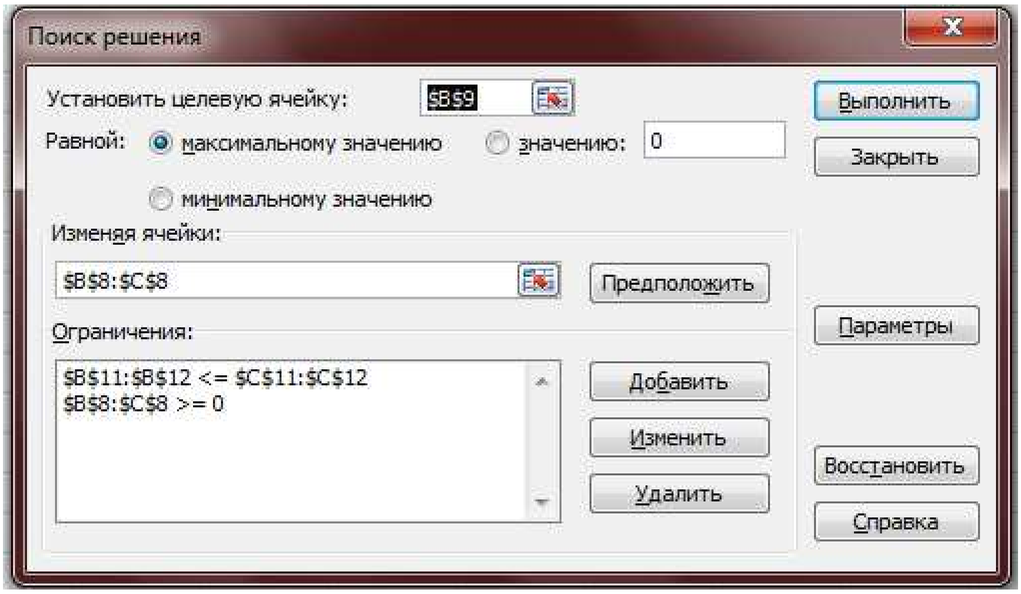
Создадим форму для решения задачи в Excel.

	A	B	C
1	Исходные данные		
2		Пирог	Чизбургер
3	Прибыль, $	0,2	0,15
4	Расход мяса, фунтов	0,25	0,2
5			
6	Оптимальный план		
7		Пирог	Чизбургер
8			
9	Прибыль, $	0	-> max
10			Запас
11	Расход мяса, фунтов	0	200
12	Всего продукции	0	900
13			

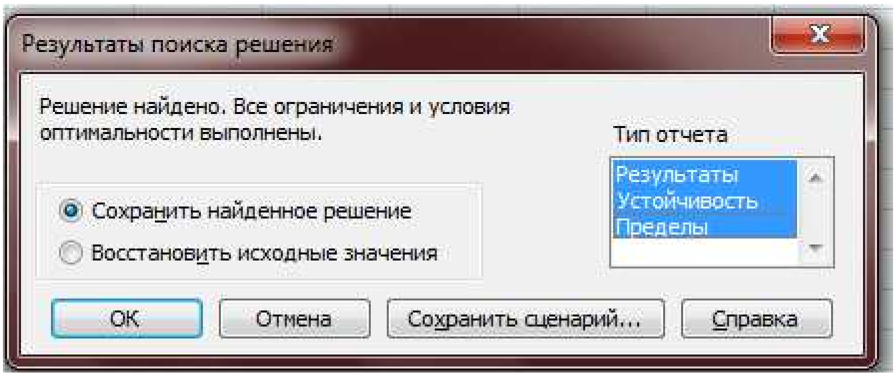
Формулы в ячейках:

	A	B	C
1	Исходные данные		
2		Пирог	Чизбургер
3	Прибыль, $	0,2	0,15
4	Расход мяса, фунтов	0,25	0,2
5			
6	Оптимальный план		
7		Пирог	Чизбургер
8			
9	Прибыль, $	=СУММПРОИЗВ(B3:C3;B8:C8)	-> max
10			Запас
11	Расход мяса, фунтов	=СУММПРОИЗВ(B4:C4;B8:C8)	200
12	Всего продукции	=B8+C8	900
13			

Вызовем диалоговое окно надстройки «Поиск решения» и заполним его:



Получим оптимальное решение:



	A	B	C
1	Исходные данные		
2		Пирог	Чизбургер
3	Прибыль, $	0,2	0,15
4	Расход мяса, фунтов	0,25	0,2
5			
6	Оптимальный план		
7		Пирог	Чизбургер
8		800	0
9	Прибыль, $	160	-> max
10			Запас
11	Расход мяса, фунтов	200	200
12	Всего продукции	800	900
13			

6. Выводы и рекомендации по найденному решению.

Итак, при заданных условиях наиболее целесообразно производить ежедневно 800 порций мясного пирога. Прибыль при этом составит 160 долларов, запас мяса будет израсходован полностью, ограничение по числу блюд выполнено. Производить чизбургеры в заданной ситуации нерентабельно.

Для увеличения прибыли целесообразно увеличивать ежедневный запас мяса (увеличение запаса на 1 фунт дает дополнительные 8$ прибыли). Увеличивать запас мяса имеет смысл не более, чем на 25 фунтов. Без изменения прибыли можно снизить ограничение на ежедневное число блюд до 800.

Для того, чтобы стало рентабельно производить чизбургеры, следует добиться, чтобы прибыль от производства чизбургера составляла как минимум 17 центов.