# Решенная работа по теоретической механике

## Кинематика

**Задание №3. Кинематика точки.**

По заданным уравнениям движения построить траекторию движения точки, найти ее положение в конкретный момент времени на траектории, найти скорость и ускорение точки, а также определить радиус кривизны траектории (в указанный момент времени)

$x = 3t + 1\,(\text{м}),\ \ y = 9t^2 - 3t\,(\text{м}),\ \ t = 0$

Для определения траектории избавимся от параметра $t$ и выразим $y$ через $x$:

$$x = 3t + 1,\quad t = \frac{1}{3}(x-1)$$

$$y = 9t^2 - 3t = 9\cdot\frac{1}{9}(x-1)^2 - 3\cdot\frac{1}{3}(x-1) = x^2 - 3x + 2$$

Уравнением движения является парабола:

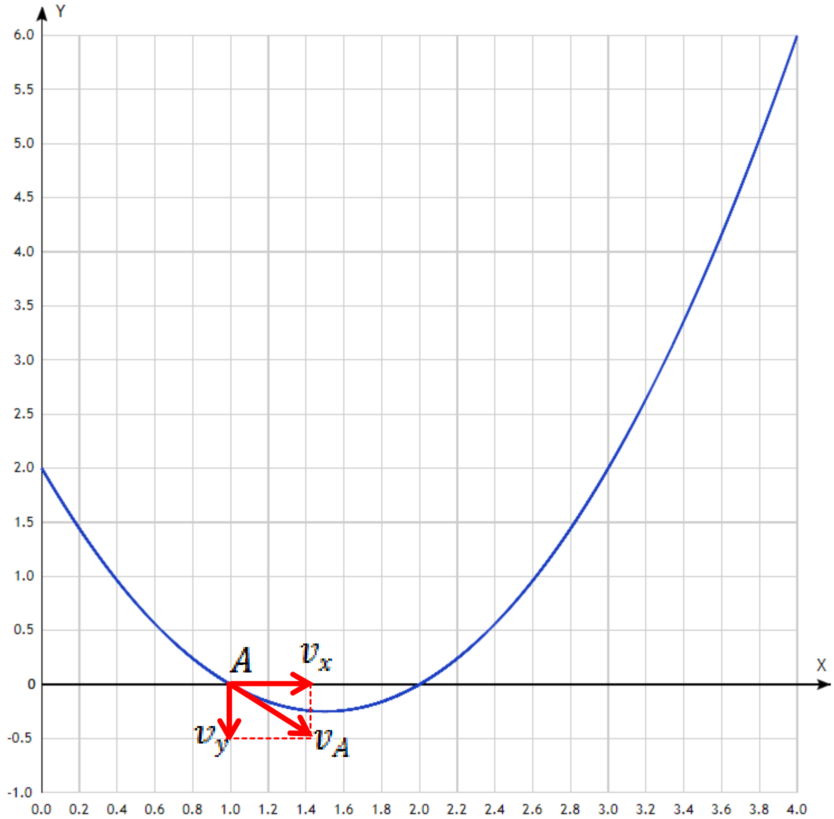
$$y = x^2 - 3x + 2$$

$$y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Вершина параболы имеет координаты:

$$X_A = \frac{3}{2},\ \ Y_A = -\frac{1}{4}$$

и парабола пересекает ось $X$ в точках с координатами: $(1;0)$ и $(2;0)$.




Проекции вектора скорости $\bar{v}$ на оси $x$ и $y$ определяются соотношениями:

$$v_x = \dot{x} = (3t+1)' = 3(\text{м}/\text{с})$$

$$v_y = \dot{y} = (9t^2 - 3t)' = 18t - 3(\text{м}/\text{с})$$

Проекции вектора ускорения $\bar{a}$ на оси $x$ и $y$ равны:

$$a_x = \dot{v}_x = 0$$

$$a_y = \dot{v}_y = (18t - 3)' = 18\left(\text{м}/\text{с}^2\right)$$

В момент времени $t = 0$ координаты, скорость и ускорение равны:

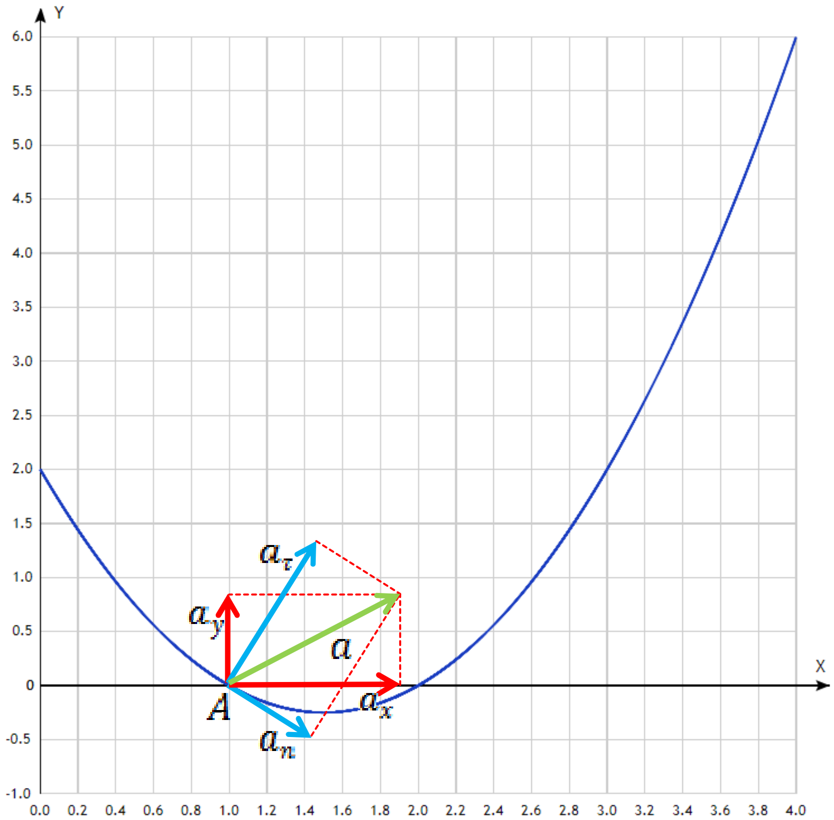
$$x|_{t=0} = 3 \cdot 0 + 1 = 1(\text{м})$$

$$y|_{t=0} = 9 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$$

$$v_x|_{t=0} = 3(\text{м}/\text{с})$$

$$v_y|_{t=0} = 18 \cdot 0 - 2 = -3(\text{м}/\text{с})$$

$$v|_{t=0} = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{18} \approx 4{,}26(\text{м}/\text{с})$$




$$a_x|_{t=0} = 0, \qquad a_y|_{t=0} = 18\left(\text{м}/\text{с}^2\right)$$

$$a|_{t=0} = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = 18\left(\text{м}/\text{с}^2\right)$$

Точка движения по криволинейной траектории и ее ускорение можно представить в виде:

$$a = \sqrt{{a_n}^2 + {a_\tau}^2}$$

где касательное ускорение $a_\tau$ определяется соотношением:

$$a_\tau = \left|\frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}\right| = \left|\frac{3\cdot 0 - 3\cdot 18}{\sqrt{18}}\right| \approx 3\cdot\sqrt{18} \approx 12{,}73\left({}^{\text{м}}/_{c^2}\right)$$

Нормальное ускорение равно:

$$a_n = \sqrt{a^2 - {a_\tau}^2} = \sqrt{18^2 - \left(3\sqrt{18}\right)^2} \approx 3\sqrt{18} \approx 12{,}73\left({}^{\text{м}}/_{c^2}\right)$$

Пользуясь формулой для нормального ускорения $a_n = \frac{v^2}{\rho}$

находим радиус кривизны $\rho$:

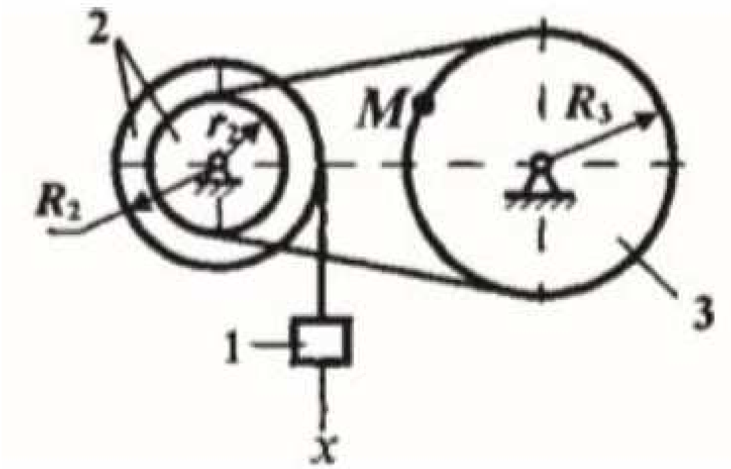
$$\rho|_{t=0} = \frac{v^2}{{a_n}^2} = \frac{4{,}26^2}{12{,}73^2} = 0{,}112\ (\text{м})$$

**Задание №4. Простейшие виды движения твердого тела.**

Для приведенной схемы движения по известному уравнению движения груза 1, определить и показать на рисунке скорость и ускорение точки $M$ в момент времени, когда груз опустится на расстояние S:

$x(t) = 15t^2 + 30(\text{см})$, $R_2 = 30\text{см}$, $r_2 = 20\text{см}$,

$R_3 = 40\text{см}$, $S = 0{,}6\text{м} = 60\text{см}$



Найдем момент времени $t$, когда расстояние $S$, пройденное грузом равно заданному:

$$S = 15t^2 + 30 = 60$$

$$t = \sqrt{2} \approx 1{,}42(c)$$

Скорость груза будет равна:

$$v = \frac{dx}{dt} = (15t^2 + 30)' = 30t(\text{м}/\text{с})$$

При $t = 1{,}42(c)$:

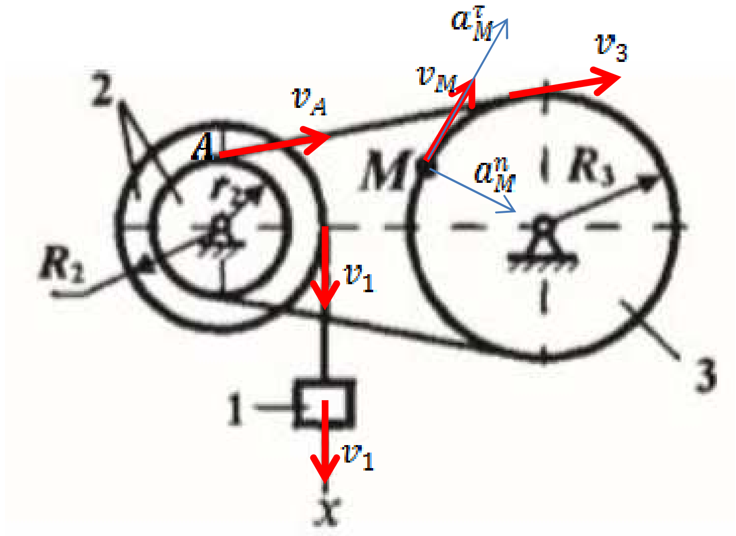
$$v|_{t=1{,}42} = 30 \cdot 1{,}42 = 42{,}6(\text{м}/\text{с})$$

Далее, найдем зависимость между скоростями точек механизма.

Скорость груза 1 можно выразить через угловую скорость второго тела:

$$v_1 = \omega_2 \cdot R_2$$

Отсюда $\omega_2 = \frac{v_1}{R_2}$



Скорость точки $A$ равна:

$$v_A = \omega_2 r_2 = \frac{v_1}{R_2} r_2 = 30t \cdot \frac{20}{30} = 20t\left({}^{\text{м}}/_{\text{с}}\right)$$

$$v_A|_{t=1,42c} = 20 \cdot 1{,}42 = 28{,}4\left({}^{\text{м}}/_{\text{с}}\right)$$

Скорость точек $M$ и $A$ равны:

$$v_M = v_3 = v_A = 20t$$

$$v_M|_{t=1,42c} = 28{,}4\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}}$$

Угловая скорость тела 3 равна:

$$\omega_3 = \frac{v_M}{R_3} = \frac{20t}{40} = 0{,}5t$$

$$\omega_3|_{t=1,42c} = 0{,}5 \cdot 1{,}42 = 0{,}71(1/c)$$

Угловое ускорение тела 3:

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = (0{,}5t)' = 0{,}5(1/\text{с}^2)$$

и $\varepsilon_3$ не зависит от времени, т.е. вращение является равноускоренным.

Ускорение точки $M$ равно:

$$a_M = \sqrt{{a_{M\tau}}^2 + {a_{Mn}}^2}$$

Здесь касательное ускорение равно:

$$a_{M\tau} = \varepsilon_3 R_3 = 0{,}5 \cdot 40 = 20\left({}^{\text{см}}/_{\text{с}^2}\right)$$

Находим нормальное ускорение:

$$a_{Mn} = {\omega_3}^2 R_3 = 0{,}25t^2 \cdot 40 = 10t^2$$

$$a_{Mn}|_{t=1,42c} = 20\left({}^{\text{см}}/_{\text{с}^2}\right)$$

Получаем:

$$a_M = \sqrt{20^2 + (10t^2)^2} = 10\sqrt{4 + t^4}$$

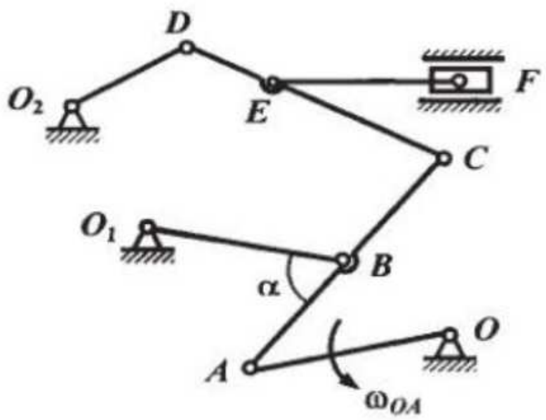
$$a_M|_{t=1,42} = 10\sqrt{4+1{,}42^4} \approx 28{,}4\left({}^{\text{см}}/_{\text{с}^2}\right)$$

## Задание №5. Плоскопараллельное движение твердого тела.

Требуется определить скорость тела, ее ускорение, угловую скорость и угловое ускорение тела для фиксированного момента времени на основании исходных данных. Требуется:

- установить вид движения каждого звена механизма
- определить величины и построить вектора скорости точек $A$ и $B$
- найти положение МЦС всех звеньев, совершающих плоскопараллельное движение
- построить векторы скоростей всех обозначенных точек звеньев механизма

$OA = 10$см, $\omega_{OA} = 3\,{}^{\text{рад}}/_{\text{с}}$, $\widehat{OAB} = 30°$, $\alpha = 60°$




Ползун $F$ движется по направляющей, звенья $OA, O_1B$ и $O_2D$ совершают вращательное движение, звенья $AC, DC$ и $EF$ совершают плоское движение. Вначале, покажем скорости тех точек, направления которых известны. Это скорости $\bar{v}_F$ и $\bar{v}_E$ точек $F$ и $E$ вдоль направляющей, и скорости

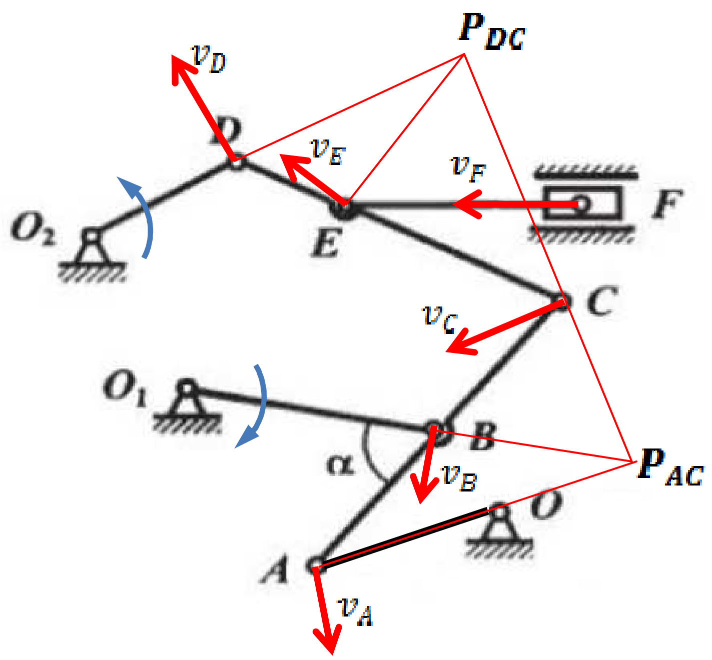
$\bar{v}_A, \bar{v}_B$ и $\bar{v}_D$ точек $A, B$ и $D$ направленные перпендикулярно $OA, O_1B$ и $O_2D$ соответственно. Направление скорости $\bar{v}_A$ определяется направлением $\omega_{OA}$ звена $OA$ и по модулю скорости равна:

$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 3 \cdot 10 = 30\ ^{\text{см}}/_{\text{с}}$

Проекции скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ на прямую $AB$ равны между собой. Следовательно:

$v_A \cos(90° - \widehat{OAB}) = v_B \cos(90° - \alpha)$

$$v_B = v_A \frac{\cos 60°}{\cos 30°} = \frac{30}{\sqrt{3}} \approx 17{,}3\ ^{\text{см}}/_{\text{с}}$$




МЦС для звена $ABC$ находится в $P_{AC}$, точке пересечения перпендикуляров к $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, т.е. в точке пересечения $AO$ и $O_1B$. В $\Delta ACP_{AC}$:

$$\widehat{AP_{AC}C} = (\alpha - \widehat{OAB}) + \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 90° + \frac{\alpha}{2} - \widehat{OAB} = 90° + \frac{60°}{2} - 30° = 90°$$

Скорость $\bar{v}_C$ точки $C$ перпендикулярна $CP_{AC}$, т.е. составляет с $AC$ угол $\gamma = 90° - \widehat{OAB} = 60°$

Проведя перпендикуляры к $\bar{v}_C$ и $\bar{v}_D$ находим их точку пересечения $P_{DC}$, которая является МЦС для звена $DC$. Учитывая, что $v_D \perp O_2D$ и $v_C \perp CP_{AC}$, точку $P_{CD}$ можно найти как пересечение прямых $CP_{AC}$ и $O_2D$.

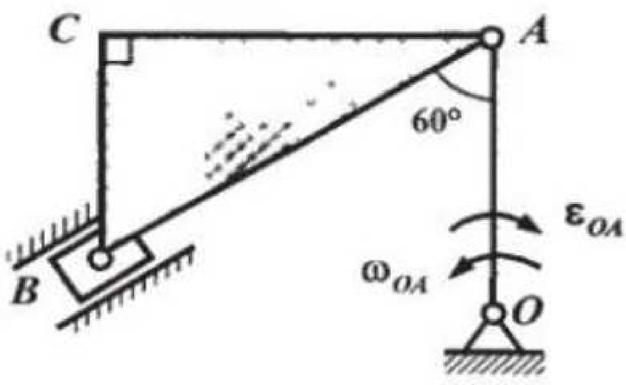
Соответственно:

$\bar{v}_E \perp EP_{CD}$

**Задание №6. Определение скорости и ускорения точки при плоском движении.**

Для заданного положения звеньев механизма определить скорости и ускорения точек $B$ и $C$.

$\varepsilon_{OA} = 1\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$, $\omega_{OA} = 3\frac{\text{рад}}{\text{с}}$, $OA = AC = 30\text{см}$



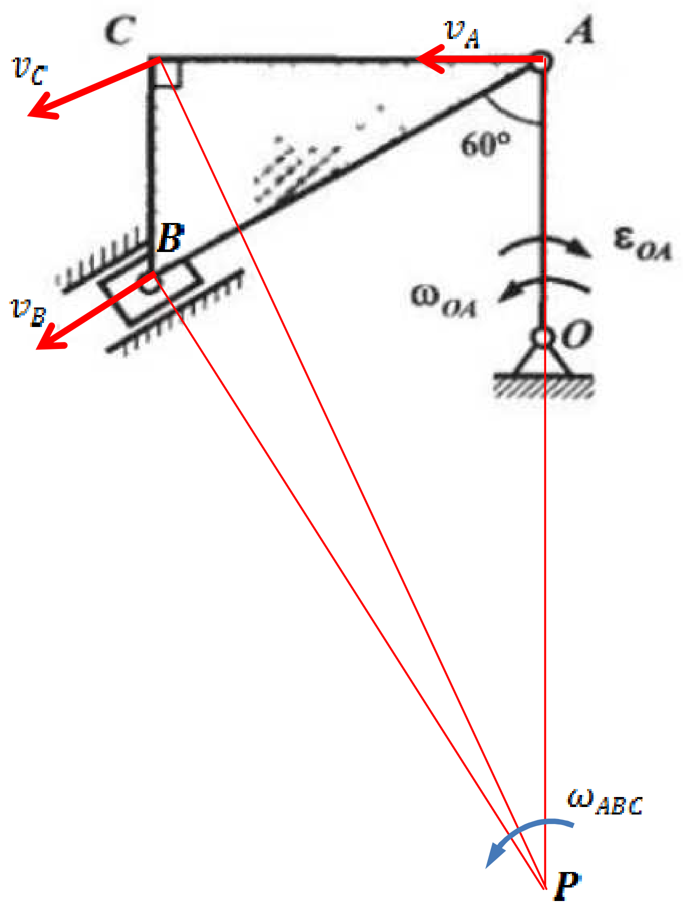

Направление скорости $\bar{v}_A$ точки $A$ определяется направлением $\omega_{OA}$ – угловой скорости звена $OA$ и

$\bar{v}_A \perp OA$,

т.е. скорость $\bar{v}_A$ направлена вдоль $AC$.

Скорость $\bar{v}_B$ползуна $B$ направлена вдоль $AB$. МЦС звена $AB$ находится в точке $P_{AB}$ пересечения $AO$ и перпендикуляра к $AB$. Из прямоугольного $\Delta ABP$:

$AP = 2AB, \quad PB = AB\sqrt{3}$



Из прямоугольного $\Delta ABC$:

$$AC = AB\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Соответственно:

$$PC = \sqrt{AC^2 + AP^2} = \sqrt{\frac{3}{4}AB^2 + 4AB^2} = AB\frac{\sqrt{19}}{2} = 2{,}18AB$$

Учитывая, что:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 30 \cdot 3 = 90(^{\text{см}}/_{\text{с}})$$

$$AB = \frac{AC}{\cos 30°} = \frac{60}{\sqrt{3}} = 34{,}64(\text{см})$$

находим угловую скорость звена ABC

$$\omega_{ABC} = \frac{v_A}{AP} = \frac{90}{2 \cdot 34{,}64} = 1{,}3\frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

Далее, находим скорости точек $B$ и $C$

$$v_B = \omega_{ABC} \cdot PB = 1{,}3 \cdot 1{,}732 \cdot 34{,}64 = 78\,^{\text{см}}/_{\text{с}}$$

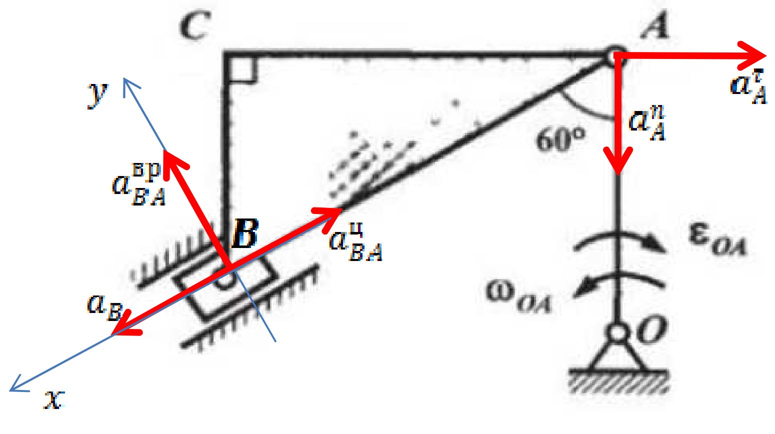
$$v_C = \omega_{ABC} \cdot PC = 1{,}3 \cdot 2{,}18 \cdot 34{,}64 = 98{,}1\,^{\text{см}}/_{\text{с}}$$

Ускорение точки $B$ складывается из ускорения точки $A$ и ускорения точки $B$ относительно $A$:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}{}^{\text{ц}} + \bar{a}_{BA}{}^{BP},$$

где ускорение точки $A$ складывается из двух составляющих:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A{}^n + \bar{a}_A{}^\tau$$



Нормальное ускорение $\bar{a}_A{}^n$ равно:

$$a_A{}^n = \omega_{OA}{}^2 \cdot OA = 3^2 \cdot 30 = 270\left(\text{см}/\text{с}^2\right)$$

Касательное ускорение $\bar{a}_A{}^\tau$ направлено в сторону углового ускорения $\varepsilon_{OA}$ и определяется формулой:

$$a_A{}^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 1 \cdot 30 = 30\,\text{см}/\text{с}^2$$

Центростремительное ускорение точки $B$ относительно $A$ равно:

$$a_{BA}{}^\text{ц} = \omega_{ABC}{}^2 \cdot AB = 1{,}69 \cdot 34{,}64 = 58{,}54\left(\text{см}/\text{с}^2\right)$$

Запишем уравнение для ускорения точки $B$ в проекциях на оси $X$ и $Y$:

$$a_B = a_A{}^n \cos 60° - a_A{}^\tau \cos 30° - a_{BA}{}^\text{ц}$$

$$0 = -a_A{}^n \cos 30° - a_A{}^\tau \cos 60° + a_{BA}{}^{BP}$$

Из этих уравнений следует:

$$a_{BA}{}^{BP} = a_A{}^n \cdot 0{,}866 + a_A{}^\tau \cdot 0{,}5 = 270 \cdot 0{,}866 + 30 \cdot 0{,}5 = 249\,\text{см}/\text{с}^2$$

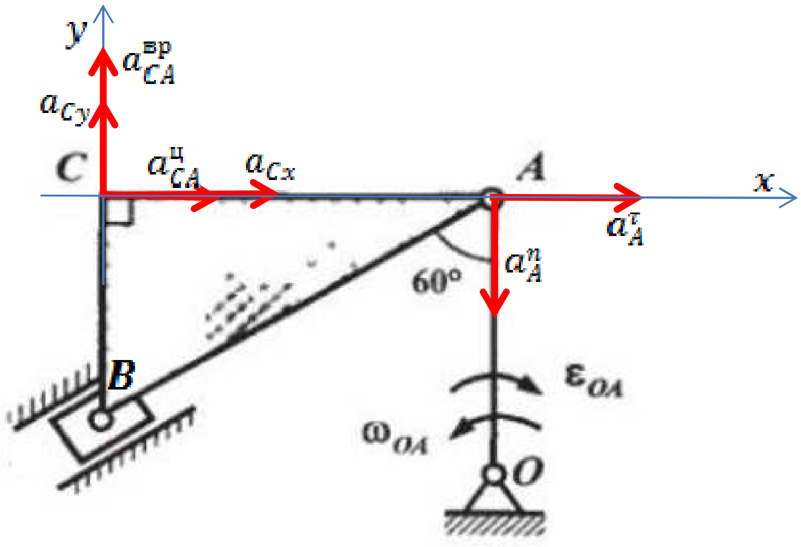
$$a_B = a_A{}^n \cdot 0{,}5 - a_A{}^\tau \cdot 0{,}866 - a_{BA}{}^\text{ц} = 270 \cdot 0{,}5 - 30 \cdot 0{,}866 - 58{,}54 = 50{,}5\,\text{см}/\text{с}^2$$

Угловое ускорение $\varepsilon_{ABC}$ находим из соотношения:

$$\varepsilon_{ABC} = \frac{a_{BA}{}^{BP}}{AB} = \frac{249}{34{,}64} = 7{,}2\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

Проводим аналогичные вычисления для точки $C$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A{}^n + \bar{a}_A{}^\tau + \bar{a}_{CA}{}^\text{ц} + \bar{a}_{CA}{}^{BP}$$




Находим:

$$a_{CA}{}^{ц} = \omega_{ABC}{}^2 \cdot AC = 1{,}69 \cdot 30 = 50{,}7 \left({}^{см}/_{с^2}\right)$$

$$a_{CA}{}^{BP} = \varepsilon_{ABC} \cdot AC = 7{,}2 \cdot 30 = 216 \left({}^{см}/_{с^2}\right)$$

В проекциях на оси $X$ и $Y$:

$$a_{cx} = a_A{}^\tau + a_{CA}{}^{ц} = 30 + 50{,}7 = 80{,}7 \left({}^{см}/_{с^2}\right)$$

$$a_{cy} = -a_A{}^n + a_{OA}{}^{BP} = -270 + 216 = -54 \left({}^{см}/_{с^2}\right)$$

Получаем:

$$a_C = \sqrt{a_{cx}{}^2 + a_{cy}{}^2} = \sqrt{80{,}7^2 + 54^2} = 97{,}1 \left({}^{см}/_{с^2}\right)$$