Контрольная работа по теоретической механике

Динамика

Д1. Схема Д1.5 Условие 7.

Груз D массой m, получив в точке А начальную скорость V_0, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы один горизонтальный, другой наклонный. На участке AB на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила Q (ее направление показано на рис. 1.7) и сила сопротивления среды R, зависящая от скорости V груза (направлена против движения), трением груза о трубу на участке AB пренебречь.

В точке B груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу f) и переменная сила F, проекция которой F_x на ось Bx задана.

Считая груз материальной точкой и зная длину l движения груза от точки A до точки B, найти закон движения груза на участке BC.

Дано: m=5кг, V_0=14м/с, l=3.5м, F_x=-8*cos(6*t)Н, f=0.2, g≈9.81м/c^2, α=30^0, Q=10Н, R=0.6*V^2.

Определить: $x=f(t)$-?

Решение.

1.Рассмотрим движение груза на участке AB, считая его материальной точкой. Изображаем груз в произвольном положении и действующие на него силы: P - сила тяжести, N- реакция трубы, R, Q. Проводим ось Az и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$m*\frac{dV_z}{dt}$=P*sinα-Q-R, или (1)

$m*V_z\frac{dV_z}{dz}$=P*sinα-Q-R; (2)

Принимая во внимание, что

$V_z=V$,Q =10H, R=$\mu*V^2$,где μ=0.6, P=m*g, получим

$m*V*\frac{dV}{dz}$ =m*g*sinα-10-0.6*V^2, сокращаем на m=5кг:

$V*\frac{dV}{dz}$ =2.905-0.12*V^2;

$V*\frac{dV}{dz}$ =-0.12*(V^2-24.2); (3)

Разделяем в (3) переменные и интегрируем:

$\frac{V*dV}{(V^2-24.2)}$ = -0.12*dz; (4)

0.5*$\ln(V^2-24.2)$=-0.12*z+C1; (5)

Константу интегрирования в (4) находим по начальным условиям.

При z=0, $V=V_0$=14м/с, тогда из (5)

C1=$0.5*\ln(14^2-24.2)$ =0.5*$\ln 119.8$=0.5*4.78582≈2.39291;

В итоге уравнение (5) принимает вид

0.5*$\ln(V^2-24.2)$= -0.12*z+2.39291;

$\ln(V^2-24.2)$=-0.24*z+4.78582;

$e^{(-0.24*z+4.78582)}$ = V^2-24.2; (6)

Так как l= z=3.5м, теперь из уравнения (6), подставив z, можем вычислить V:

V^2= $e^{4.54582}$+24.2=94.2+24.2≈118.4;

$V=V_B$= $\sqrt{118.4}$ ≈10.88м/с; (7)

2. Рассмотрим движение груза на участке ВС. Найденная скорость V_B на этом

участке будет начальной. Изображаем груз и действующие на него силы P, N, F_x, $F_{тр}$. Проведем из точки B ось Bx и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$m*\frac{dVx}{dt} = F_x - F_{тр}$; (8)

Подставляем в (8) значения силы (учитывая, что $V_x=V$, $F_{тр}$=f*m*g*cosα, F_x=-4*cos(3*t));

$m*\frac{dVx}{dt}$ =-8*cos(6*t)-f*m*g*cosα; (9)

Разделим (9) на m=5кг:

$\frac{dV}{dt}$=-1.6*cos(6*t)-1.7; (10)

Разделяем в (10) переменные и интегрируем:

dV= (-1.6*cos(6*t)-1.7)*dt;

$\frac{dx}{dt}$=V=-0.27*sin(6*t)-1.7*t+C2; (11)

Уравнение (11) повторно интегрируем

dx=(-0.27*sin(6*t)-1.7*t+C2)*dt;

x=0.044*cos(6*t)+0.85*t^2+C2*t+C3; (12)

Константы интегрирования находим из начальных условий. Будем отсчитывать время от момента, когда груз D находился в точке B.

При t=0, $V=V_B$ ≈10.88м/с, x=0, тогда из (11) и (12) получаем константы:

C2= V_B ≈10.88;

C3≈-0.044;

Подставив найденные константы в (12), окончательно получаем искомый закон движения, после подстановки численных параметров:

x=0.044*cos(6*t)+0.85*t^2+10.88*t-0.044;

Ответ: $x(t)$=0.044*cos(6*t)+0.85*t^2+10.88*t-0.044.

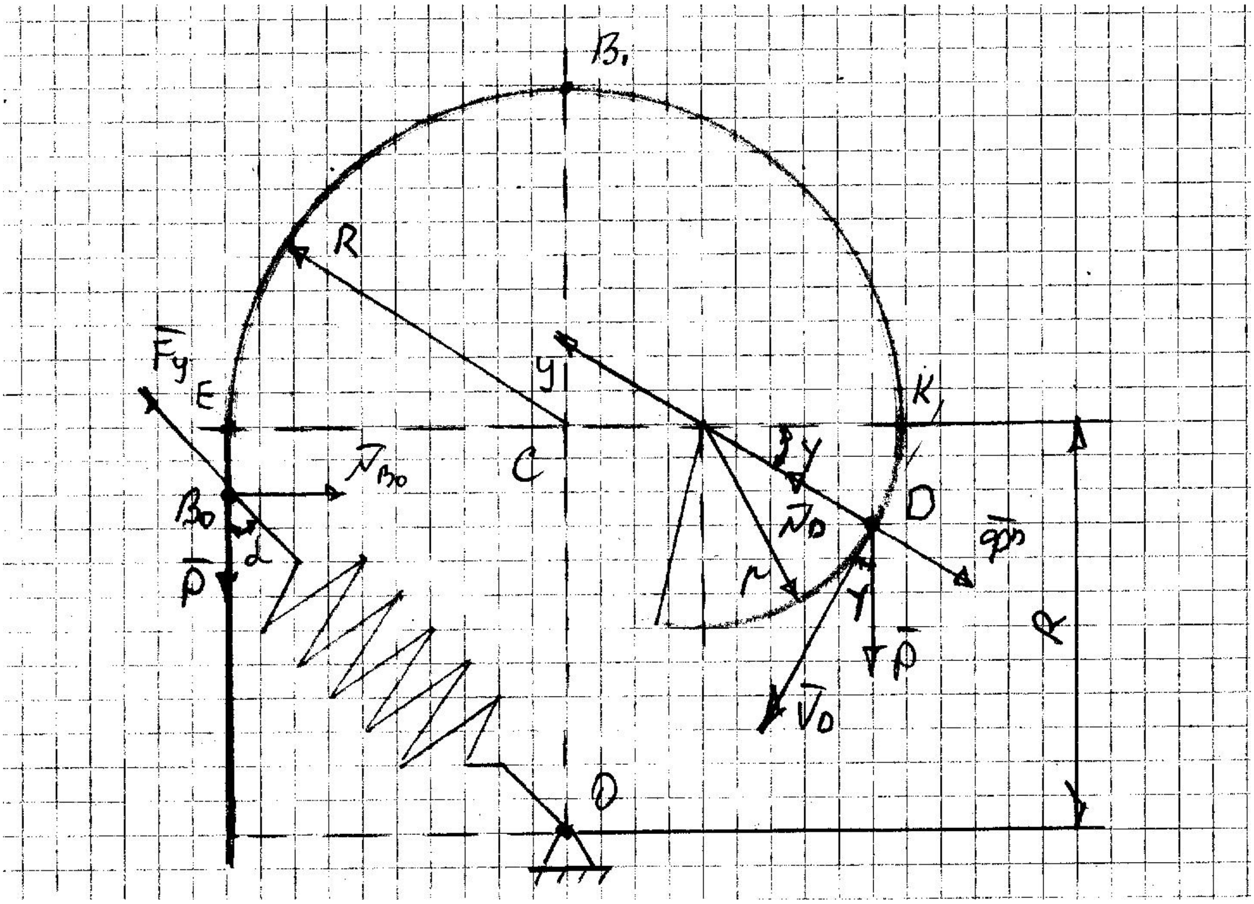

Рисунок 1.8

Д2. **Схема Д2.5** **Условие 7.**

Тонкий гладкий стержень, расположенный в вертикальной плоскости, изогнут так, что состоит из прямолинейного участка и двух дуг окружностей радиуса R, r, сопряженных в точке K (рис.1.8). На стержень нанизан шар весом P, прикрепленный к пружине с коэффициентом жесткости c=k(P/R), другой конец пружины закреплен в точке O. Длина пружины в недеформированном состоянии равна l_0. Шар начинает двигаться без начальной скорости из положения B_0 определяемого углом α (при α = 90° считать шар чуть смещенным от равновесного положения в сторону точки B_1); достигнув точки B_1, указанной на рисунке, шар освобождается от пружины и дальше движется под действием только силы тяжести. Считая шар материальной точкой, определить, какую скорость он будет иметь, придя в точку D, и с какой силой будет давить на стержень в этой точке (силу давления выразить через вес P шара). Положение точки D, когда она находится на дуге радиуса R, определяется углом β, а на дуге радиуса r - углом γ.

Дано: R=0.5м, r=0.6*R=0.6*0.5=0.3м, c=k*P/R=10*P/0.5=20*P, α=45^0, γ=30^0, l_0=2.5*R=1.25м, g≈9.81м/c^2.

Определить: V_D, N_D-?

Решение.

Примем шар за материальную точку. Для определения V_D рассмотрим шар в произвольном положении. Изобразим действующие на него силы: P- сила тяжести, N- реакция стержня, F_y- сила упругости пружины, действующая на участке B_0B_1.

Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$\vec{T}_D-\vec{T}_{B_0}=A(\vec{P})+A(\vec{F}_y)+A(\vec{N}); \qquad (1)$$

Так как реакция $\vec{N}$ перпендикулярна перемещению, то A($\vec{N}$)=0.

Работа силы тяжести равна:

A(P)=P*h, где

h=R-(R-r*sinγ)=0.5-(0.5-0.3*0.5)=0.5-(0.5-0.15)=0.5-0.35=0.15м;

Работа силы тяжести равна:

A(P)=P*h=0.15*P;

Работа силы упругости A(F_y) на перемещении B_0B_1 определяется по формуле:

A(F)=(c/2)*(λ_0^2-λ_1^2);

λ_0=OB_0-l_0=R/sinα-l_0=0.5/0.707-1.25=0.707-1.25≈-0.543м;

λ_1=OB_1-l_0=2*R-l_0=2*0.5-1.25=1-1.25=-0.25м;

Работа силы упругости:

A(F)=(c/2)*(λ_0^2-λ_1^2)=(20*P/2)*(0.294849-0.0625)=20*P*0.232349≈4.647*P;

Подставляя найденные значения работ в уравнение (1) и учитывая, что V_{B_0}=0, а значит и T_{B_0}=0, а m=P/g, определим искомую скорость V_D:

0.5*m*V_D^2-0.5*m*$V_{B_0}^2$=A($\vec{P}$)+A($\vec{F}$)+A($\vec{N}$);

0.5*m*V_D^2-0=4.647*P+0.15*P+0;

0.5*m*V_D^2=4.797*P;

0.5*m*V_D^2=4.797*m*g;

V_D^2=9.594*g;

V_D^2=9.594*9.81≈94.11714;

V_D=$\sqrt{94.11714}$≈9.7м/с;

Рассмотрим положение шарика в точке D. Приложим внешние силы, действующие на шарик. Проведём через точку D ось координат Dy. В точке D на шарик действуют: сила тяжести P, нормальная реакция стержня N_D, касательная и нормальная составляющие силы инерции $\vec{\Phi}$. Запишем уравнение «равновесия» шарика в точке D:

$\vec{P}$+$\vec{N}_C$+$\vec{\Phi}^\tau$+$\vec{\Phi}^n$=0;

В проекции на ось Dy:

-P*sinγ-Φ^n+N_D=0; (2)

Из (2):

N_D=Φ^n+P*sinγ=(P/g)*V_D^2/r+P*sinγ=(P/9.81)*94.11714/0.3+0.5*P=

=31.98*P+0.5*P≈32.48*P(H);

Ответ: V_D ≈9.7м/с, N_D ≈32.48*P(H).

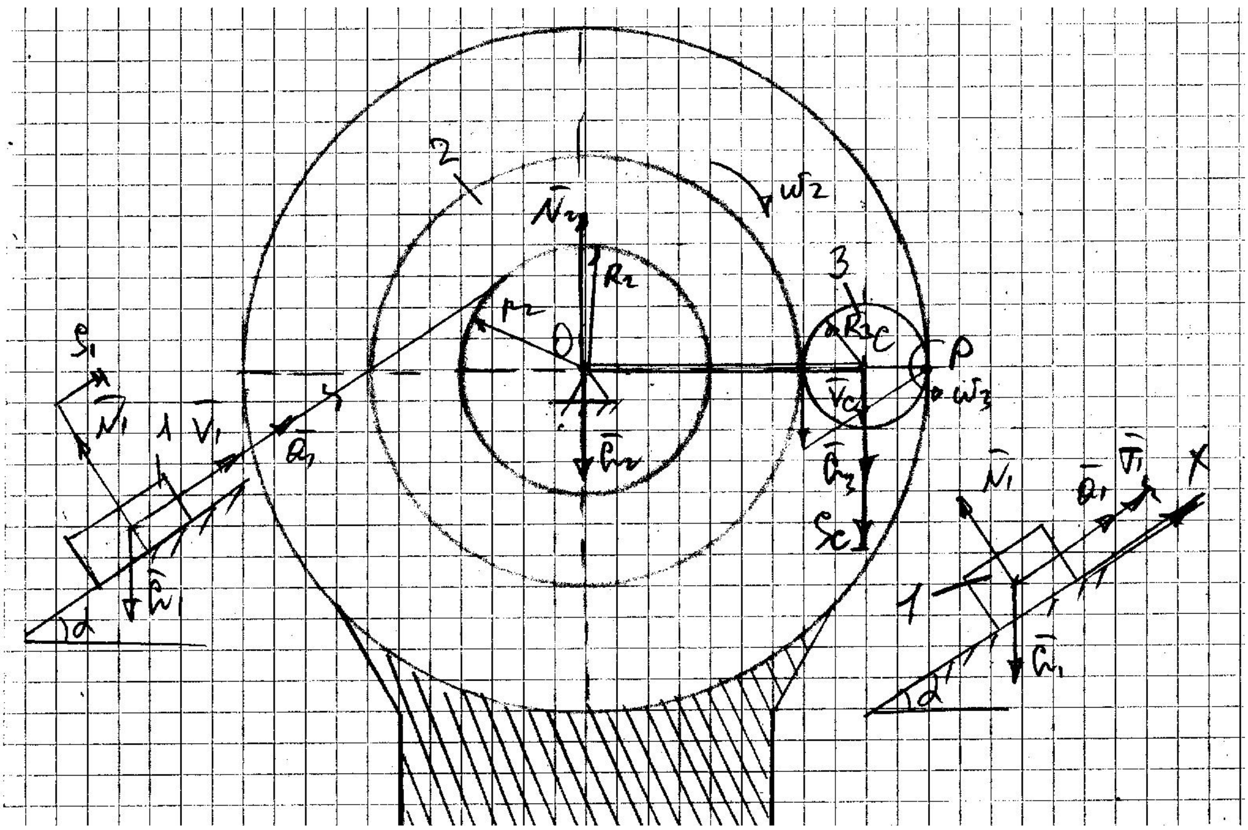

Рисунок 1.9

Д3. **Схема Д3.5** **Условие 7.**

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя. Начальное положение системы показано на схеме. Пренебрегая массами нитей и предполагая их нерастяжимыми, определить скорость и ускорение груза 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным S_1, а так же натяжение нити.

Дано: R_2=0.15м, r_2=0.8*R_2=0.12м, R_3=0.28м, i_2=0.16м, δ=0.003м, m=20кг, m_1=m=20кг, m_2=0.5*m=10кг, m_3=2.5*m=50кг, α=30^0, S_1=3м, g≈9.81м/c^2.

Определить: V_1, a_1, T_1-?

Решение.

Для определения скорости груза 1 применим теорему об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i .$$

$$T_0 = 0; \sum_{k=1}^{n} A_k^i = 0.$$

Тогда теорема будет иметь вид:

$$T = \sum_{k=1}^{n} A_k^e . \qquad (1)$$

Определим кинетическую энергию системы:

T= T_1+ T_2+ T_3,

Где

T_1=0.5*m_1*V_1^2-кинетическая энергия груза 1, совершающего поступательное движение;

T_2=0.5*J_2*ω_2^2- кинетическая энергия ступенчатого шкива 2, совершающего вращательное движение;

T_3=0.5*m_3*V_C^2+0.5*J_C*ω_3^2- кинетическая энергия блока 3, совершающего плоскопараллельное движение;

Величины ω_2, ω_3, V_C выражаем через скорость V_1:

ω_2=V_1/r_2 ≈8.333*V_1;

ω_2*R_2=ω_3*2*R_3;

ω_3=ω_2*R_2/(2*R_3)=8.33*V_1*0.15/(2*0.28)≈2.231*V_1;

V_C=ω_3*R_3=2.231*V_1*0.28≈0.625*V_1;

Моменты инерции блока 3 и ступенчатого шкива 2 с периферийной массой, относительно оси вращения:

J_C =0.5*m_3*R_3^2=0.5*50*0.28*0.28=1.96кг*$м^2$;

$J_2=m_2*i_2^2$=10*0.16*0.16=0.256кг*$м^2$;

Получаем выражения кинетических энергий тел:

T_1=0.5*m_1*V_1^2=0.5*20*V_1^2=10*V_1^2;

T_2=0.5*J_2*ω_2^2=0.5*0.256*69.439*V_1^2 ≈8.9*V_1^2;

T_3=0.5*m_3*V_C^2+0.5*J_C*ω_3^2=0.5*50*0.390625*V_1^2+0.5*1.96*4.977*V_1^2=

=9.72*m*V_1^2+4.88*V_1^2 ≈14.6*V_1^2;

Кинетическая энергия всей системы:

T=T_1+ T_2+ T_3=10*V_1^2+8.9*V_1^2+14.6*V_1^2 ≈33.5*V_1^2;

Итак , кинетическая энергия всей системы:
T≈33.5*V_1^2;
Определяем работу внешних сил системы на перемещении S_1. Внешние

силы: силы тяжести G1, G2, G3 опорные реакции тел N1, N2. Выразим

перемещение тел системы через перемещение S_1:

S_1=S=3м;

S_C=0.625*S_1=3*0.625=1.875м;

Запишем выражения для работ внешних сил системы на её конечном

перемещении:

A(G1)=G1*sinα*S_1=m*g*sinα*S_1=20*9.81*0.5*3≈294.3Дж;

A(G3)=G3*S_C=50*9.81*1.875≈919.7Дж;

Работы остальных внешних сил равны нулю , так как точки приложения этих сил неподвижны или не совершают работы.

Сумма работ внешних сил:

$\sum_{k=1}^{n} A_k^e$=A(G3)-A(G1)=919.7-294.3≈625.4Дж;

Итак:

T≈33.5*V_1^2; $\sum_{k=1}^{n} A_k^e$ ≈625.4Дж;

Подставляем полученные результаты в уравнение (1) и получаем:

33.5*V_1^2=625.4;

V_1^2=625.4/33.5;

V_1^2 ≈1866865672;

V_1= $\sqrt{1866865672}$ ≈4.32м/с;

Для определения ускорения груза 1 применим теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^{n} N_k^e + \sum_{k=1}^{n} N_k^i. \quad (3)$$

Мощность внутренних сил $\sum_{k=1}^{n} N_k^i = 0,$ кинетическая энергия системы:

$T=T_1+T_2+T_3+T_4=33.5*V_1^2=0.5*67*V_1^2$;

Определяем мощность внешних сил, действующих на механическую систему

N(G1)=m_1*g*sinα*V_1=20*9.81*0.5≈98.1*V_1;

N(G3)= m_3*g*V_C=50*9.81*0.625*V_1 ≈306.25*V_1;

Мощность всех остальных внешних сил равна 0, так как точки их

приложения неподвижны.

$\sum_{k=1}^{n} N_k^e=\vec{N}$(G1)+$\vec{N}$(G3);

$\sum_{k=1}^{n} N_k^e=N$(G3)-N(G1)=306.25*V_1-98.1*V_1 ≈208.15*V_1;

$\sum_{k=1}^{n} N_k^e$ ≈208.15*V_1;

T=0.5*67*V_1^2

dT/dt=d(0.5*67*V_1^2)/dt=0.5*2*67*V_1*dV_1/dt=67*V_1*a_1;

Приравнивая левую и правую части теоремы (3), получим:

67*V_1*a_1=208.15*V_1;

a_1 =208.15*V_1/(67*V_1)≈3.1м/c^2;

Для определения натяжений нити, используем теорему о движении центра масс. Для этого расчленим систему по грузу 1(рис.1.9) и рассмотрим движение груза 1 в отдельности.

Показываем внешние силы, действующие на груз 1. При расчленении системы натяжения нитей становятся внешними силами.

T_1=-T_1;   по третьему закону Ньютона.

Рассмотрим отдельно груз 1 в проекции на ось x:

$m_1 * a_1 = T_1 - P_1 *\sin\alpha$;

$T_1 = P_1 *\sin\alpha + m_1 * a_1 = m_1 * g * \sin\alpha + m_1 * a_1 = 20*9.81*0.5+20*3.1=$

$=196.2+62 \approx 258.2$Н;

Ответ: $V_1 \approx 4.32$м/с, $a_1 \approx 3.1$м/с, $T_1 \approx 258.2$Н.