Сопротивление материалов

РГР №1. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

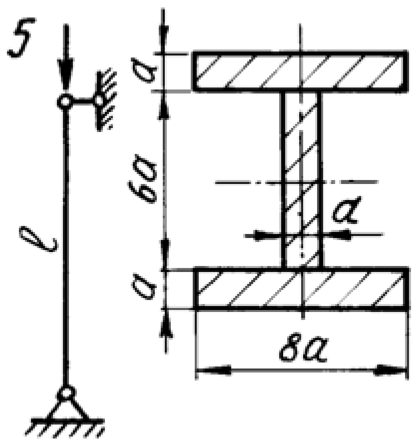
Для стального стержня длиной l, сжимаемого силой P, требуется:

1) подобрать размеры поперечного сечения стержня из условия его устойчивости при допускаемом напряжении на сжатие [σ] = 160 МПа (расчет проводить методом последовательных приближений по коэффициенту снижения допускаемых напряжений на сжатие);

2) найти величину критической силы и коэффициент запаса устойчивости n_y.

Числовые данные для расчета следует взять из табл.1, расчетные схемы по рис. 1.

$\ell = 2{,}7\text{м},\ P = 350\ \text{кН}.$



Решение

1. Определение геометрических характеристик сечения стержня через искомый размер сечения.

Разбиваем сложную фигуру на простые: три прямоугольника.

Общая площадь сечения: $F = F_1 + F_2 + F_3 = a \cdot 6a + 2 \cdot a \cdot 8a = 22a^2$;

размер a

$$a = \sqrt{\frac{F}{22}}.$$

Фигура симметричная относительно осей x и y, поэтому центр тяжести находится в точке $x_C = \frac{8a}{2} = 4a$; $y_C = \frac{a + 6a + a}{2} = 4a$.

Моменты инерции будем вычислять относительно центральных осей фигуры (центра тяжести).

Момент инерции сложной фигуры (Ix) относительно оси X_C (центр тяжести сложной фигуры) равен сумме моментов инерции простых фигур составляющих эту сложную фигуру (относительно этой же оси).

$Jx = Jx_1 + Jx_2 + Jx_3$;

где Ix_1 - момент инерции прямоугольника 1;

Ix_2 - момент инерции прямоугольника 2;

Ix_3 - момент инерции прямоугольника 3.

$$J_{x_1} = J'_{x_1} + b_1^2 \cdot F_1; \quad J_{x_2} = J'_{x_2} + b_2^2 \cdot F_2; \; J_{x_3} = I'_{x_3} + b_3^2 \cdot F_3;$$

где J'_{x_1} – момент инерции прямоугольника 1 относительно собственного центра тяжести;

J'_{x_2} - момент инерции прямоугольника 2 относительно собственного центра тяжести;

I'_{x_3} - момент инерции прямоугольника 3 относительно собственного центра тяжести;

b_1 - расстояние от центра тяжести прямоугольника 1 до оси Xc ;

b_2 - расстояние от центра тяжести прямоугольника 2 до оси Xc;

b3 - расстояние от центра тяжести прямоугольника 3 до оси Xc;

F_1 - площадь прямоугольника 1; F_2 - площадь прямоугольника 2;

F_3 - площадь прямоугольника 3.

Главные центральные моменты инерции

1) Прямоугольник 1 $F_1 = 8a^2$; $J'_{x_1} = \frac{8a \cdot a^3}{12} = \frac{2a^4}{3}$; $J'_{y_1} = \frac{a \cdot (8a)^3}{12} = \frac{128a^4}{3}$.

$$J_{x_1} = J'_{x_1} + b_1^2 \cdot F_1 = \frac{2a^4}{3} + (3,5a)^2 \cdot 8a^2 = 98,67a^4;$$

$$J_{y_1} = J'_{y_1} + a_1^2 \cdot F_1 = \frac{128a^4}{3} + 0 = \frac{128a^4}{3};$$

2) Прямоугольник 2: $A_2 = 6a^2$; $J_{x_2} = \frac{a \cdot (6a)^3}{12} = 18a^4$; $J_{y_2} = \frac{a^3 \cdot 6a}{12} = \frac{a^4}{2}$.

$$J_{x_2} = J'_{x_2} + b_2^2 \cdot F_1 = 18a^4 + 0^2 \cdot 6a^2 = 18a^4;$$

$$J_{y_2} = J'_{y_2} + a_2^2 \cdot F_2 = \frac{a^4}{2} + 0^2 \cdot 6a^2 = \frac{a^4}{2};$$

3) Прямоугольник 2: $A_3 = 8a^2$; $J_{x_3} = \frac{8a \cdot a^3}{12} = \frac{2a^4}{3}$; $J_{y_3} = \frac{a \cdot (8a)^3}{12} = \frac{128a^4}{3}$.

$$J_{x_3} = J'_{x_3} + b_3^2 \cdot F_3 = \frac{2a^4}{3} + (3,5a)^2 \cdot 8a^2 = 98,67a^4;$$

$$J_{y_3} = J'_{y_3} + a_3^2 \cdot F_3 = \frac{128a^4}{3} + 0 = \frac{128a^4}{3};$$

Главные центральные моменты инерции

$$J_x = J_{x_1} + J_{x_2} + J_{x_3} = 98{,}67a^4 + 18a^4 + 98{,}67a^4 = 215{,}34a^4$$

$$J_y = J_{y_1} + J_{y_2} + J_{y_3} = \frac{128a^4}{3} + \frac{a^4}{2} + \frac{128a^4}{3} = 85{,}83a^4$$

Минимальный момент инерции $J_{min} = 85{,}83a^4$.

Минимальный радиус инерции

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{F}} = \sqrt{\frac{85{,}83a^4}{22a^2}} = 1{,}98a.$$

Для заданного варианта закрепления по табл. 2 выбирается коэффициент приведения длины $\mu = 1$.

Гибкость стержня

Гибкость стержня $\lambda = \dfrac{\mu l}{i_{min}} = \dfrac{1 \cdot 2{,}7}{1{,}98a} = \dfrac{1{,}364}{a}$;

2. Подбор поперечного сечения стержня.

Из условия устойчивости площадь поперечного сечения $F \geq \dfrac{P}{\varphi \cdot [\sigma]_{сж}}$

Как указывалось выше, в условии устойчивости неизвестными величинами являются φ и A, которые можно найти методом последовательных приближений, для чего задается одна из неизвестных величин

Для первого приближения примем $\varphi_1 = 0{,}5$.

Тогда соответствующая площадь поперечного сечения стержня

$$F_1 = \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma]} = \frac{350 \cdot 10^3}{0{,}5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 4{,}375 \cdot 10^{-3}\, м^2$$

Находим параметр a:

$$a_1 = \sqrt{\frac{F_1}{22}} = \sqrt{\frac{4{,}375 \cdot 10^{-3}}{22}} = 1{,}41 \cdot 10^{-2}\, м.$$

Проверяем, соответствует ли допускаемая нагрузка для подобранного сечения заданной силе.

Гибкость стержня при $a_1 = 1,41 \cdot 10^{-2}\ м$:

$$\lambda_1 = \frac{1,364}{1,41 \cdot 10^{-2}} = 97.$$

По табл. (см. раздел справочные данные) следует найти соответствующий коэффициент φ. Значения λ = 97 в таблице нет, поэтому искомое значения коэффициента φ определяется линейной интерполяцией:

при λ = 90 $\varphi_{90} = 0,69$;

при λ = 100 $\varphi_{100} = 0,60$;

$$\varphi_1^* = \varphi_{97} = \varphi_{90} - \frac{\varphi_{90} - \varphi_{100}}{10} \cdot (97 - 90) = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} \cdot 7 = 0,627$$

Соответствующая допускаемая сила

$$P_{доп_1} = \varphi_1^* \cdot F_1 \cdot [\sigma] = 0,627 \cdot 4,375 \cdot 10^{-3} \cdot 160 \cdot 10^6 = 438,9 кН.$$

Расхождение между заданной силой и полученной

$$\frac{\left|F_{зад} - F_{доп_1}\right|}{F_{зад}} \cdot 100\% = \frac{|350 - 438,9|}{350} \cdot 100\% = 25,4\%.$$

Подобранное сечение не удовлетворяет условию устойчивости, так как допускаемое расхождение между силами заданной и полученной расчетным путем не должно превышать 5%.

Вычисления повторяются еще раз.

Второе приближение: новое значение коэффициента φ_2 определяется по выражению:

$$\varphi_2^* = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^*}{2} = \frac{0,5 + 0,627}{2} = 0,563.$$

Все вычисления, выполненные при первом приближении, повторяются, но при новом значении $\varphi = \varphi_2$:

$$F_2 = \frac{P}{\varphi_2 \cdot [\sigma]} = \frac{350 \cdot 10^3}{0,563 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3,885 \cdot 10^{-3}\, м^2$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{F_2}{22}} = \sqrt{\frac{3,885 \cdot 10^{-3}}{22}} = 0,013\, м.$$

$$\lambda_2 = \frac{1,364}{0,0133} = 103;$$

при $\lambda = 100$ $\varphi_{100} = 0,60$;

при $\lambda = 110$ $\varphi_{110} = 0,52$;

$$\varphi_2^* = \varphi_{103} = \varphi_{100} - \frac{\varphi_{100} - \varphi_{110}}{10} \cdot (103 - 100) = 0,60 - \frac{0,60 - 0,52}{10} \cdot 3 = 0,576;$$

$$P_{доп_2} = \varphi_2^* \cdot F_2 \cdot [\sigma] = 0,576 \cdot 3,885 \cdot 10^{-3} \cdot 160 \cdot 10^6 = 358кН.$$

Расхождение между заданной силой и полученной

$$\frac{\left|P_{зад} - P_{доп_2}\right|}{P_{зад}} \cdot 100\% = \frac{|350 - 358|}{350} \cdot 100\% = 2,3\%.$$

Расхождение между силами составляет менее 5%, что приемлемо. Тогда искомый размер $a = a_2 = 0,013\, м = 1,3\, см.$

3. Определение критической силы.

Для подобранного сечения расчетная гибкость стержня $\lambda = 103.$

Предельная гибкость для стали марки *Ст. 3* равна 100, поэтому критическую силу следует вычислять по формуле Эйлера, так как $\lambda > \lambda_{пр}$.

Минимальный момент инерции принятого сечения стержня

$$J_{\min} = J_y = 0,133c^4 = 0,133 \cdot 3,2^4 = 14\, см^4.$$

$$\mathrm{J}_{\min} = 85,83 \cdot \mathrm{a}^4 = 85,83 \cdot 1,3^4 = 245,14\, \mathrm{см}^4.$$

Критическая сила

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 245,14 \cdot 10^{-8}}{(1 \cdot 2,7)^2} = 664кН.$$

Запас устойчивости сжатого стержня:

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{664}{350} = 1,90.$$