Контрольная работа по теории вероятностей

Задание 1

Задание. *Бросают три монеты. Какова вероятность того, что выпадет хотя бы один «орел», и при этом первым будет «орел»?*

Решение.

При бросании «первой» монеты может выпасть либо «орел», либо «решка». Аналогичные два элементарных исхода возможны при бросании «второй» и «третьей» монеты. Каждый из исходов бросания «первой» монеты может сочетаться с каждым из исходов бросания «второй» и «третьей» монет. Таким образом, общее число возможных элементарных исходов равно 2·2·2 = 8. эти исходы образуют полную группу и равновозможны.

Благоприятствующими интересующем нас событию А (в результате бросания трех монет выпадет хотя бы один «орел», и при этом первым будет «орел») являются следующие четыре исхода:

1) «орел», «орел», «орел»; 2) «орел», «орел», «решка»;

3) «орел», «решка», «орел»; 4) «орел», «решка», «решка».

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех возможных элементарных исходов [3, с. 8]: $P(A) = 4/8 = 1/2 = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

Задание 2

Задание. *Бросают две кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков будет равна 6 и при этом на первой кости очков будет меньше 2?*

Решение.

На выпавшей грани «первой» игральной кости может появиться одно очко, два очка, три очка, четыре очка, пять очков, шесть очков. Аналогичные шесть элементарных исходов возможны при бросании «второй» кости. Каждый из исходов бросания «первой» кости может сочетаться с каждым из исходов бросания «второй». Таким образом, общее число возможных элементарных исходов испытания равно 6·6 = 36. Эти исходы образуют полную группу и равновозможны.

Пусть событие A = {сумма выпавших очков равна 6, при этом на первой на первой кости очков меньше 2}. Этому событию благоприятствует только один исход, когда в результате бросания двух игральных костей на первой кости выпадает одно очко, а на второй – пять очков (1 < 2, 1 + 5 = 6).

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех возможных элементарных исходов [3, с. 8]: $P(A)$ = 1/36.

Ответ: 1/36.

Задание 3

Задание. *Среди жильцов некоторого дома 35% имеют собаку, 45% имеют кошку и 15% имеют и кошку и собаку. Какова вероятность того, что наугад выбранный человек а) не имеет ни кошки, ни собаки; б) или имеет кошку, или не имеет собаки?*

Решение.

а) Пусть событие A = {наугад выбранный человек имеет в доме кошку}, B = {наугад выбранный человек имеет в доме собаку}, тогда событие $A \cap B$ = = AB = {наугад выбранный человек имеет в доме и кошку и собаку}. По условию, вероятность события A: $P(A)$ = 0,35, вероятность события B: $P(B) = 0{,}45$, вероятность совместного появления событий A и B: $P(AB) = 0{,}15$.

Вероятность того, что наугад выбранный человек имеет либо кошку либо собаку, рассчитывается по теореме сложения вероятностей зависимых событий (в нашем случае событий A и B) [3, с.19]. Имеем:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}35 + 0{,}45 - 0{,}15 = 0{,}65.$$

Искомая вероятность того, что наугад выбранный человек не имеет ни кошки, ни собаки, равна $P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$.

б) Пусть событие C = {наугад выбранный человек не имеет в доме собаку}.

Пусть событие C_1 = {наугад выбранный человек не имеет в доме ни кошку ни собаку}, событие C_2 = {наугад выбранный человек имеет в доме кошку, но не имеет собаку}. Тогда

$$P(C_1) = P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35;$$

$$P(C_2) = P(A) - P(AB) = 0{,}35 - 0{,}15 = 0{,}2.$$

Поскольку события C_1 и C_2 независимы, то вероятность события C, по теореме сложения вероятностей независимых событий [3, с.18], равна:

$$P(C) = P(C_1) + P(C_2) = 0{,}35 + 0{,}2 = 0{,}55.$$

Искомая вероятность того, что наугад выбранный человек либо имеет кошку либо не имеет собаки, рассчитывается по теореме сложения вероятностей зависимых событий (в нашем случае событий A и C). Имеем:

$$P(A+C) = P(A) + P(C) - P(AC) = P(A) + P(C) - (P(A) - P(AB)) =$$

$$= P(C) + P(AB) = 0{,}55 + 0{,}15 = 0{,}7.$$

Ответ: а) 0,35; б) 0,7.

Задание 4

Задание. *В ящике находятся 12 шаров, каждый под номером от 1 до 12. Вытаскивают (случайным образом) 4 шара. Какова вероятность того, что шар под номером 2 будет вытащен?*

Решение.

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь четыре шара из двенадцати, то есть C_{12}^4.

Найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию: среди отобранных четырех шаров есть шар под номером 2 и, следовательно, остальные три шара имеют другие номера. Число таких исходов равно числу способов, которыми можно отобрать три шара из оставшихся одиннадцати, то есть C_{11}^3.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию, к общему числу возможных элементарных исходов: $P = C_{11}^3 / C_{12}^4$.

Число всевозможных сочетаний рассчитывается по формуле [7]:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Имеем:

$$P = \frac{C_{11}^3}{C_{12}^4} = \frac{11!}{3!(11-3)!} : \frac{12!}{4!(12-4)!} = \frac{11! \cdot 4! \cdot 8!}{3! \cdot 8! \cdot 12!} = \frac{11! \cdot 4 \cdot 3! \cdot 8!}{3! \cdot 8! \cdot 12 \cdot 11!} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: 1/3.

Задание 5

Задание. *Среди служащих некоторой компании 30% старше 45 лет, 40% курящих, при этом 30% и старше 45 лет, и курит. Какова вероятность того, что наугад выбранный человек а) курит, если известно, что он моложе 45 лет; б) моложе 45 лет, если известно, что он курит?*

Решение.

Пусть событие A = {наугад выбранный человек курит}, событие B = {наугад выбранный человек моложе 45 лет}. События A и B зависимые. Вероятность первого события $P(A)$ = 0,4 по условию. Поскольку среди служащих компании 30% старше 45 лет, то лиц, не достигших 45 лет, 100% – 30% = 70 %. Таким образом, вероятность второго события $P(B) = 1 – 0,3 = 0,7$. По условию, 30% служащих старше 45 лет и курят, значит, остальные (40 – 30) = 10% курящих сотрудников моложе 45 лет, то есть $P(AB) = 0,1$.

а) Необходимо найти вероятность того, что наугад выбранный человек курит, если известно, что он моложе 45 лет, то есть условную вероятность $P_B(A)$. По теореме умножения вероятностей зависимых событий [1, с.28], $P(AB)=P(B)\ P_B(A)$. Имеем:

$$P_B(A) = P(AB)/\ P(B) = 0,1/0,7 \approx 0,14.$$

б) Необходимо найти вероятность того, что наугад выбранный человек моложе 45 лет, если известно, что он курит, то есть условную вероятность $P_A(B)$. По теореме умножения вероятностей зависимых событий [1, с.28], $P(AB)=P(A)P_A(B)$. Имеем:

$$P_A(B) = P(AB)/\ P(A) = 0,1/0,4 = 0,25.$$

Ответ: а) ≈ 0,14; б) 0,25.

Задание 6

Задание. *Задана случайная величина*

X	*-2*	*3*	*5*	*7*
P	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,4*

Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

Решение.

Математическое ожидание $M(X)$ случайной величины X определяется равенством [1, с.59]:

$$M(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k.$$

В нашем случае $n = 4$. Имеем:

$$M(X)=\sum_{k=1}^{4} x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 = -2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}2 + 5\cdot 0{,}3 + 7\cdot 0{,}4 =$$

$$= -0{,}2 + 0{,}6 + 1{,}5 + 2{,}8 = 4{,}7.$$

Дисперсия $D(X)$ случайной величины X определяется равенством [1, с.59]:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - (M(X))^2.$$

Имеем:

$$D(X)=\sum_{k=1}^{4} x_k^2 p_k - 4{,}7^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + x_4^2 p_4 - 22{,}09 =$$

$$= 4\cdot 0{,}1 + 9\cdot 0{,}2 + 25\cdot 0{,}3 + 49\cdot 0{,}4 - 22{,}09 = 0{,}4 + 1{,}8 + 7{,}5 + 19{,}6 - 22{,}09 = 29{,}3 - 22{,}09 = 7{,}21.$$

Среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины X определяется равенством [3, с.64]:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Имеем:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{7{,}21}\approx 2{,}69.$$

Ответ: 4,7; 7,21; ≈ 2,69.

Задание 7

Задание. *Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием M(X) = 7 и среднеквадратическим отклонением σ(X)=1,3. найти вероятность того, что она принимает значения:*

а) в интервале (4; 8);

б) больше 2;

в) меньше 7,2;

г) либо меньше 5, либо больше 10;

д) отличающееся от M(X) не более чем на 0,9.

Решение.

а) Для нахождения вероятности того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (4; 8), воспользуемся формулой [3, с.109]:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Здесь $\Phi(x)$ – функция Лапласа, a, σ – математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины X соответственно. Подставив $\alpha = 4$, $\beta = 8$, $a = 7$, $\sigma = 1{,}3$, получим

$$P(4 < X < 8) = \Phi\left(\frac{8-7}{1{,}3}\right) - \Phi\left(\frac{4-7}{1{,}3}\right) = \Phi(0{,}77) - \Phi(-2{,}31).$$

Функция Лапласа является нечетной [6], то есть $\Phi(-2{,}31) = -\Phi(2{,}31)$. По таблице [3, с.389] находим: $\Phi(2{,}31) \approx 0{,}489$, $\Phi(0{,}77) = 0{,}2794$. Искомая вероятность $P(4 < X < 8) = \Phi(0{,}77) - \Phi(-2{,}31) = \Phi(0{,}77) + \Phi(2{,}31) \approx 0{,}7684$.

б) Для нахождения вероятности того, что случайная величина X примет значение, большее 2, воспользуемся формулой [3, с.109]:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

В нашем случае $\alpha = 2, \beta = \infty$. Имеем:

$$P(X > 2) = P(2 < X < \infty) = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{2-7}{1{,}3}\right) = \Phi(\infty) - \Phi(-3{,}85).$$

Функция Лапласа является нечетной [6], то есть $\Phi(-3{,}85) = -\Phi(3{,}85)$. По таблице [3, с.389] находим: $\Phi(3{,}85) \approx 0{,}49993$. Также известно [6], что $\Phi(\infty) = 0{,}5$. Искомая вероятность

$$P(X > 2) = \Phi(\infty) - \Phi(-3{,}85) = \Phi(\infty) + \Phi(3{,}85) \approx 0{,}5 + 0{,}49993 = 0{,}99993.$$

в) Для нахождения вероятности того, что случайная величина X примет значение, меньшее 7,2, воспользуемся формулой [3, с.109]:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

В нашем случае $\alpha = -\infty, \beta = 7{,}2$. Имеем:

$$P(X < 7{,}2) = P(-\infty < X < 7{,}2) = \Phi\left(\frac{7{,}2 - 7}{1{,}3}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi(0{,}15) - \Phi(-\infty).$$

Функция Лапласа является нечетной [6], то есть $\Phi(-\infty) = -\Phi(\infty) = -0{,}5$. По таблице [3, с.389] находим: $\Phi(0{,}15) = 0{,}0596$. Искомая вероятность

$$P(X < 7{,}2) = \Phi(0{,}15) - \Phi(-\infty) = \Phi(0{,}15) + \Phi(\infty) = 0{,}0596 + 0{,}5 = 0{,}5596.$$

г) Вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее 5,

$$P(X < 5) = P(-\infty < X < 5) = \Phi\left(\frac{5 - 7}{1{,}3}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi(-1{,}54) - \Phi(-\infty) =$$

$$= -\Phi(1{,}54) + \Phi(\infty) = -0{,}4382 + 0{,}5 = 0{,}0618.$$

Вероятность того, что случайная величина X примет значение, большее 10,

$$P(X > 10) = P(10 < X < \infty) = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{10 - 7}{1{,}3}\right) = \Phi(\infty) - \Phi(2{,}31) \approx 0{,}5 - 0{,}489 = 0{,}011.$$

Искомая вероятность равна сумме найденных вероятностей:

$$P(X < 5) + P(X > 10) \approx 0{,}0618 + 0{,}011 = 0{,}0728.$$

д) Для нахождения вероятности того, что случайная величина X примет значение, отличающееся от M(X) не более чем на 0,9, воспользуемся формулой [3, с.109]:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\delta / \sigma).$$

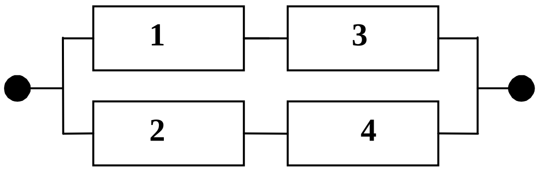
Подставив $\delta = 0{,}9$, $a = 7$, $\sigma = 1{,}3$, получим

$$P(|X - 7| < 0{,}9) = 2\Phi(0{,}9 / 1{,}3) \approx 2\Phi(0{,}69) = 2 \cdot 0{,}2549 = 0{,}5098.$$

<u>Ответ:</u> а) ≈ 0,7684; б) ≈ 0,99993; в) 0,5596; г) ≈ 0,0728; д) ≈ 0,5098.

Задание 8

Задание 3. Вероятность выхода из строя каждого из 4-х блоков равна 0,8. Найти вероятность разрыва цепи.



Решение**.**

Пусть событие A – разрыв цепи.

Цепь состоит из двух параллельных ветвей. Разрыв произойдет, когда в каждой из ветвей выйдет из строя хотя бы один из элементов.

Известно, что $p = 0{,}8$ выход из строя каждого элемента.

Выражение $1-\overline{p}\cdot\overline{p}$ означает вероятность выхода из строя хотя бы одного из элементов одной ветки.

Для искомой вероятности можно записать формулу:

$$P(A) = (1-\overline{p}\cdot\overline{p})\cdot(1-\overline{p}\cdot\overline{p}) = \left(1-(1-p)^2\right)^2 = \left(1-(1-0{,}8)^2\right)^2 = 0{,}9216.$$

Ответ: $P(A) = 0{,}9216$.

Задание 9

Задание 2. Случайная величина X задана функцией распределения (интегральной функцией) F(x):

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ \dfrac{x^2-x}{2}, & 1<x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

Требуется: ***а)*** *найти дифференциальную функцию* $f(x)$ *(плотность распределения вероятностей);* ***б)*** *найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины;* ***в)*** *построить графики интегральной и дифференциальной функций.*

Решение.

а) Для того, чтобы найти плотность вероятности (дифференциальную функцию) $f(x)$, необходимо найти производную от функции распределения $F(x)$: $f(x)=F'(x)$.

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & \text{ïðè} \quad x\le 1, \\ \dfrac{1}{2}\cdot(2x-1) & \text{ïðè} \quad 1<x\le 2, \\ 0 & \text{ïðè} \quad x>2. \end{cases}$$

б) Математическое ожидание непрерывной случайной величины определяется формулой: $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx$. В данном случае получаем

$$M(X)=\int\limits_1^2 x\cdot\frac{1}{2}(2x-1)dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^2\left(2x^2-x\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\left(2\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(2\cdot\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(2\cdot\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{16}{3}-2-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{32-12-4+3}{6}=\frac{19}{2\cdot 6}=\frac{19}{12}\approx 1{,}5833.$$

Дисперсию непрерывной случайной величины можно определить по формуле: $D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx-[M(X)]^2$.

$$D(X)=\int\limits_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{2}(2x-1)dx-\left(\frac{19}{12}\right)^2=\frac{1}{2}\int\limits_1^2\left(2x^3-x^2\right)dx-\frac{361}{144}=$$

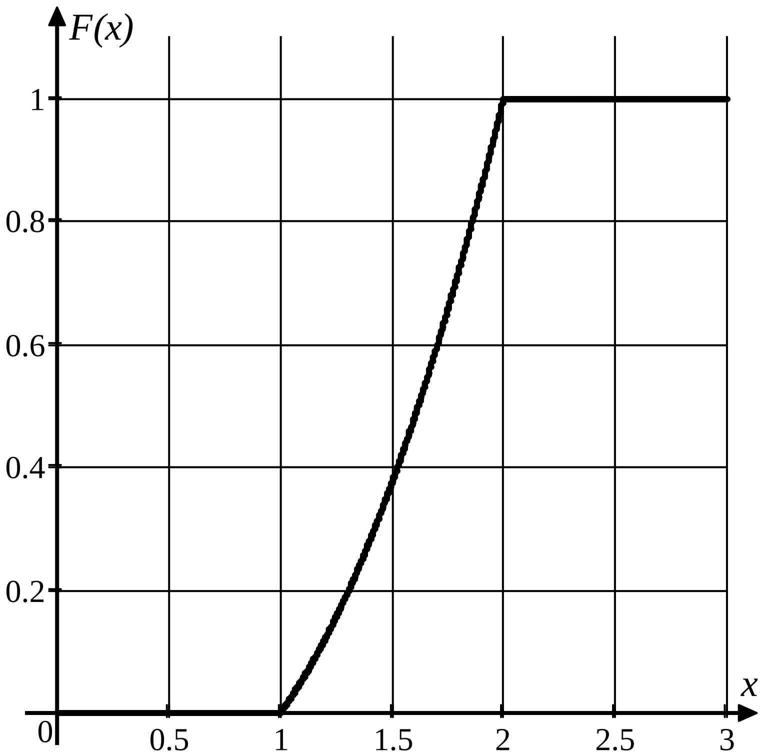
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(2\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2-\frac{361}{144}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2^4}{2}-\frac{2^3}{3}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1^4}{2}-\frac{1^3}{3}\right)-\frac{361}{144}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(8-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{361}{144}=\frac{1}{2}\cdot\frac{48-16-3+2}{6}-\frac{361}{144}=\frac{31}{2\cdot 6}-\frac{361}{144}=$$

$$\frac{372-361}{144}=\frac{11}{144}\approx 0{,}0764.$$

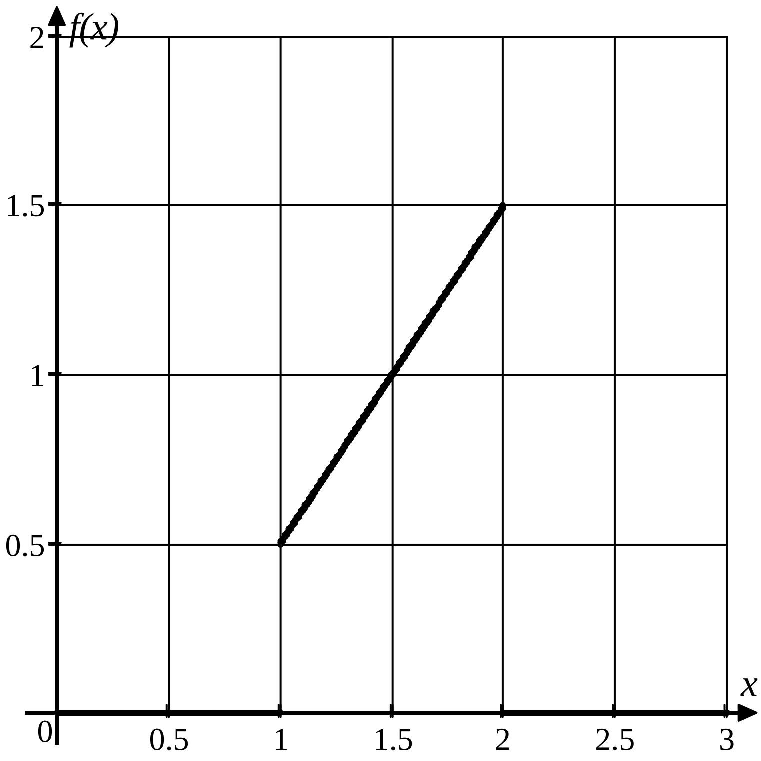
в) Построим график функции распределения $F(x)$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ \dfrac{x^2-x}{2}, & 1<x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$



Построим график плотности распределения вероятностей $f(x)$.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 1, \\ \frac{1}{2}\cdot(2x-1) & \text{при} \quad 1<x\le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$$


f(x)
2
1.5
1
0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
x