Контрольная работа по высшей математике
Начала математического анализа

Задача 1. Найти предел функции, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x}$

Решение.

$$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x}=\left(\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1+2}{2x+1}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{3x}=\left(1^{\infty}\right)=$$

Приведем к второму замечательному пределу: $\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}\to e,\ t\to\infty$.

$$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right)^{\frac{2}{2x+1}3x}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{6x}{2x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{6}{2+1/x}}=e^{3}.$$

Ответ: e^3

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+5x)}{8x}$

Решение.

$$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+5x)}{8x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Получили неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Используем эквивалентность $\ln(1+t)\sim t,\ t\to0$:

$$=\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{8x}=\frac{5}{8}.$$

Ответ: $\dfrac{5}{8}$.

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x^2-x}$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x^2-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Умножим и поделим на сопряженное числителю выражение.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{\left(x^2-x\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{(2+x-2+x)}{\left(x^2-x\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x-1)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{(x-1)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\frac{2}{-1\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Задача 2. Найти производные функций:

а) $y=\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{x}}$.

Решение. Используем формулу производной от частного:

$$y'=\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}\sqrt{x}-\operatorname{tg}x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{2x\frac{1}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}x}{2\left(\sqrt{x}\right)^3}=\frac{2x-\operatorname{tg}x\cos^2 x}{2\left(\sqrt{x}\right)^3\cos^2 x}=$$

$$=\frac{2x-\sin x\cos x}{2\left(\sqrt{x}\right)^3\cos^2 x}.$$

б) $y=x\operatorname{ctg}x$.

Решение. Используем формулу производной от произведения:

$$y'=\left(x\operatorname{ctg}x\right)'=(x)'\operatorname{ctg}x+x\left(\operatorname{ctg}x\right)'=\operatorname{ctg}x+x\frac{-1}{\sin^2 x}=\operatorname{ctg}x-\frac{x}{\sin^2 x}.$$

в) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

Решение. Используем формулу производной от сложной функции:

$$y'=\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)=\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{1+x}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}+2x\sqrt{x}}.$$

г) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 2\cos t. \end{cases}$

Решение.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{(2\cos t)'}{(\sin t)'} = \frac{-2\sin t}{\cos t} = -2\,\mathrm{tg}\,t$$

д) $x^3y^2 + xy + \sin y = 0$.

Решение. Берем производную от правой и левой части и выражаем y'. Получаем:

$$\left(x^3y^2 + xy + \sin y\right)' = 0,$$
$$\left(x^3\right)' y^2 + x^3\left(y^2\right)' + (x)' y + x(y)' + \cos y (y)' = 0,$$
$$3x^2y^2 + x^3 2yy' + y + xy' + y'\cos y = 0,$$
$$y'\left(2x^3y + x + \cos y\right) = -3x^2y^2 - y,$$
$$y' = -\frac{3x^2y^2 + y}{2x^3y + x + \cos y}.$$

Задача 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt{100 - x^2}$ на отрезке $[-6;8]$.

Решение. Область определения функции $D(y) = [-10;10]$.
Найдем критические точки. Вычислим производную и приравняем к нулю:

$$y' = \left(\sqrt{100 - x^2}\right)' = \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}} = 0,.$$
$$x = 0.$$

Получаем критическую точку: $x = 0$. Она лежат внутри отрезка $[-6;8]$.

Вычисляем значения функции на концах отрезка и в точке $x = 0$:

$$y(0) = \sqrt{100 - 0} = 10,$$
$$y(-6) = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8,$$
$$y(8) = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6.$$

Наименьшее значение функции 6, наибольшее 10.

Ответ: Наименьшее значение функции 6, наибольшее 10.

Задача 4. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y=\frac{16}{x^2(x-4)}.$$

Решение.

1) Область определения функции $x\neq 0, x\neq 4$, то есть $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;4)\cup(4;+\infty)$.

Точки разрыва $x=0,\ x=4$. Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{16}{x^2(x-4)}=\frac{16}{-0}=-\infty,\ \lim_{x\to 0+0}\frac{16}{x^2(x-4)}=\frac{16}{-0}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 4-0}\frac{16}{x^2(x-4)}=\frac{16}{-0}=-\infty,\ \lim_{x\to 4+0}\frac{16}{x^2(x-4)}=\frac{16}{+0}=+\infty,$$

Получаем, что $x=1$ и $x=4$ - вертикальные асимптоты.

2) Точки пересечения с осями координат:

Ox: $y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}=0$, нет точек

Oy : $x=0\notin D(y)$.

3) Функция общего вида, так как

$$y(-x)=\frac{16}{(-x)^2(-x-4)}=-\frac{16}{x^2(x+4)}\neq\pm y(x)$$

4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$y'(x)=\left(\frac{16}{x^2(x-4)}\right)'=-\frac{16\left(2x(x-4)+x^2\right)}{\left(x^2(x-4)\right)^2}=-\frac{16\left(2x^2-8x+x^2\right)}{x^4(x-4)^2}=-\frac{16(3x-8)}{x^3(x-4)^2}$$

Находим критические точки: $x=0,\ x=4,\ x=8/3$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.

y'	–		+		–		–
y	↘	0	↗	8/3	↘	4	↘

Функция убывает на интервалах $(-\infty;0),(8/3;4),\ (4;+\infty)$, возрастает на интервале $(0;8/3)$.

Функция имеет максимум при $x=3,\ y(8/3)=-\dfrac{27}{16}$.

5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную.

$$y''(x)=\left(-\frac{16(3x-8)}{x^3(x-4)^2}\right)'=-16\left(\frac{(3x-8)}{x^3(x-4)^2}\right)'=$$

$$=-16\frac{3x^3(x-4)^2-(3x-8)\left(3x^2(x-4)^2+x^3 2(x-4)\right)}{\left(x^3(x-4)^2\right)^2}=$$

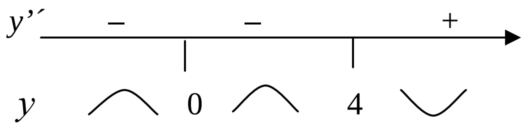
$$=-16\frac{3x^3(x-4)-(3x-8)\left(3x^3-12x^2+2x^3\right)}{x^6(x-4)^3}=-16\frac{3x^4-12x^3-(3x-8)\left(5x^3-12x^2\right)}{x^6(x-4)^3}=,$$

$$=-16\frac{3x^4-12x^3-15x^4+36x^3+40x^3-96x^2}{x^6(x-4)^3}=-16\frac{-12x^4+64x^3-96x^2}{x^6(x-4)^3}=$$

$$=64\frac{3x^4-16x^3+24x^2}{x^6(x-4)^3}=64\frac{3x^2-16x+24}{x^4(x-4)^3}$$

Приравниваем к нулю и находим критические точки: $x=0,\ x=4$.

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция выпукла вниз на интервале $(4;+\infty)$, выпукла вверх на интервалах $(-\infty;0),\ (0;4)$.

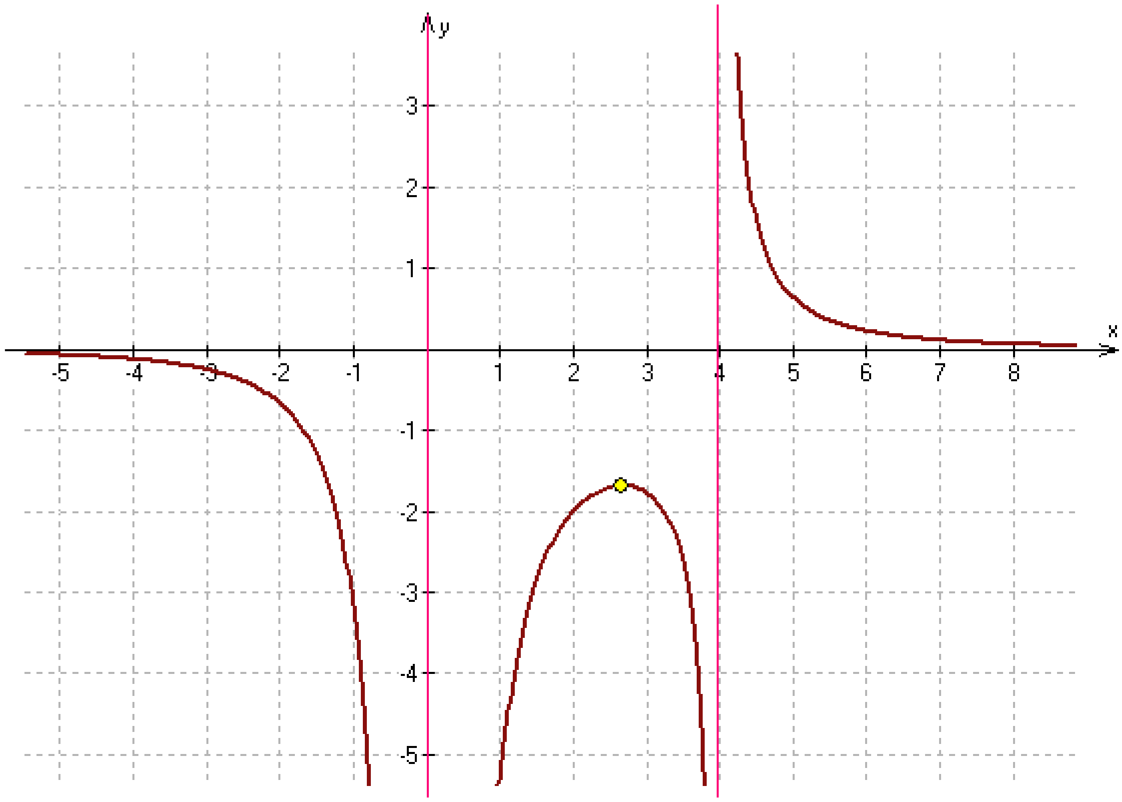
6) Наклонные асимптоты вида $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{16}{x^3(x-4)}=\left(\frac{16}{\infty}\right)=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{16}{x^2(x-4)}-0\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{16}{x^2(x-4)}=\left(\frac{16}{\infty}\right)=0.$$

Горизонтальная асимптота $y=0$.

7) Строим график функции, отмечая ключевые точки:



Список литературы

1. *Кремер Н. Ш.* – Высшая математика для экономистов. 2-е изд. М., 2001.

2. *Данко П. Е.* – Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. М., 2002. Ч. I, II.

3. *Колесников А. Н.* – Краткий курс математики для экономистов. М., 2000.

4. *Минорский В. П.* – Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для студентов вузов. М., 1972–1989.

5. *Шипачев В. С.* – Высшая математика. М., 2002.