РГР по высшей математике
Алгебра

Задача 1. Даны координаты трех точек A, B и C. Проверьте, что эти точки не лежат на одной прямой и найдите:
А) уравнение прямой AB;
Б) уравнение высоты CK треугольника ABC;
В) уравнение медианы AD треугольника ABC;
Г) координаты точки пересечения высоты CK и медианы AD;
Д) угол между медианой AD и стороной AC;
Е) площадь треугольника ABC.
Сделайте чертеж в координатной плоскости XY.
$A(1;0)$, $B(0;5)$, $C(4;5)$

Решение.
А)
Уравнение стороны AB:
$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A},$$
$$\frac{x-1}{0-1}=\frac{y-0}{5-0},$$
$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{5},$$
$y=-5x+5$. Угловой коэффициент $k_{AB}=-5$.

Проверим, что точки не лежат на одной прямой. Подставим C в уравнение данной прямой: $5\neq -5\cdot 4+5$. Да, верно, не лежат на одной прямой.

Б) Найдем уравнение высоты CK треугольника ABC. Она перпендикулярна стороне AB с угловым коэффициентом $k_{AB}=-5$, поэтому ее уравнение имеет вид:
$$y-y_C=-\frac{1}{k_{AB}}(x-x_C),$$
$$y-5=\frac{1}{5}(x-4),$$
$$y=\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}+5,$$
$$y=\frac{1}{5}x+\frac{21}{5}.$$

В) Найдем уравнение медианы AD треугольника ABC. Найдем середину стороны BC, точку D: $x_D=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{0+4}{2}=2$, $y_D=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{5+5}{2}=5$. Получили $D(2;5)$
Тогда медиана AD имеет уравнение:

$$\frac{x-x_A}{x_D-x_A}=\frac{y-y_A}{y_D-y_A},$$

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-0}{5-0},$$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{5}, \quad ,$$

$$y=5x-5.$$

Г) Найдем координаты точки M пересечения высоты CK и медианы AD. Решаем систему:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{5}x+\frac{21}{5}, \\ y=5x-5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x-5=\frac{1}{5}x+\frac{21}{5}, \\ y=5x-5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{24}{25}x=\frac{46}{5}, \\ y=5x-5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{23}{12}, \\ y=\frac{55}{12}. \end{cases}$$

Получили $M\left(\frac{23}{12};\frac{55}{12}\right)$.

Д) Найдем угол между медианой AD и стороной AC по формуле $\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{k_{AD}-k_{AC}}{1+k_{AD}\cdot k_{AC}}\right|$.

Найдем угловой коэффициент $k_{AD}=5$ и $k_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{5-0}{4-1}=\frac{5}{3}$. Подставляем:

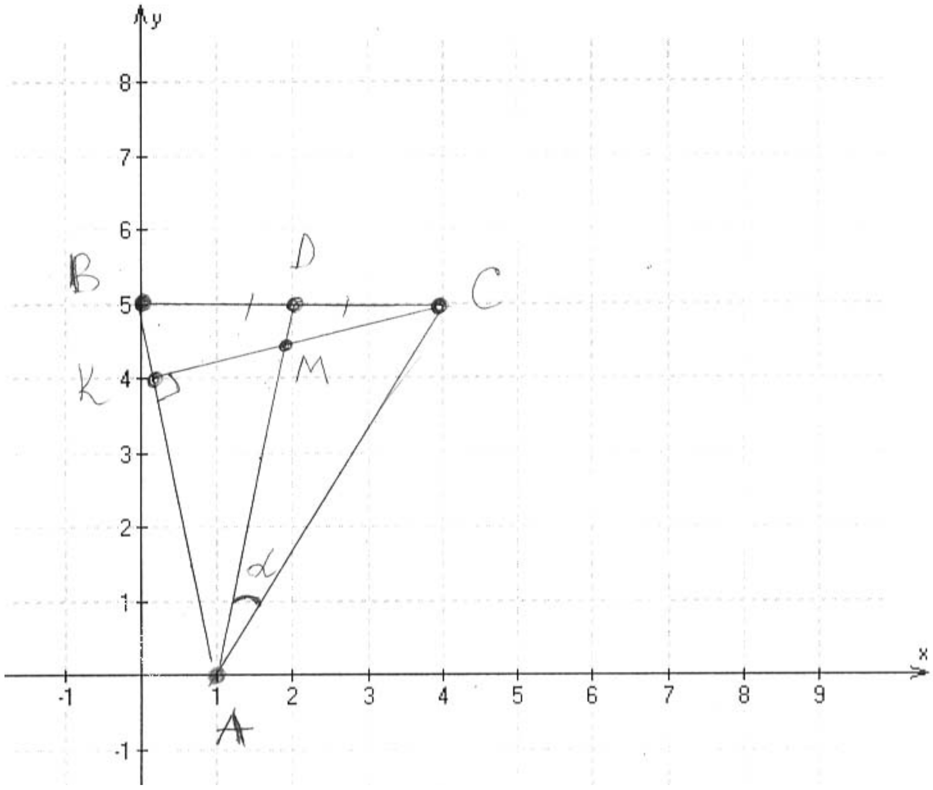
$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{k_{AD}-k_{AC}}{1+k_{AD}\cdot k_{AC}}\right|=\left|\frac{5-5/3}{1+5\cdot 5/3}\right|=\frac{5}{14}, \text{ откуда } \angle\alpha=\operatorname{arctg}\frac{5}{14}\approx 19{,}7^0$$

Е) Найдем площадь треугольника ABC по формуле $S=\frac{1}{2}|\Delta|$, где

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}=-20..$$

Таким образом, площадь $S=\frac{1}{2}|\Delta|=\frac{20}{2}=10$.

Сделаем чертеж в координатной плоскости XY.



Задача 2. Даны координаты четырех точек A, B, C и D. Проверьте, что эти точки не лежат в одной плоскости и найдите средствами векторной алгебры:
А) уравнение плоскости ABC;
Б) уравнение прямой AB;
В) площадь треугольника ABC;
Г) уравнение и длину высоты H пирамиды $ABCD$, опущенную из вершины D на основание ABC;
Д) координаты точки K - основания высоты;
Е) угол между ребром DA и основанием ABC и угол между гранями ABC и ADC;
Ж) объем пирамиды $ABCD$.

Сделайте проверку: $V = \frac{1}{3}SH$.

$A(0;5;1)$, $B(1;0;0)$, $C(3;4;6)$, $D(4;5;0)$

Решение.
А) Найдем уравнение плоскости ABC.
Найдем координаты векторов

$\overline{AB} = \{1-0; 0-5; 0-1\} = \{1; -5; -1\}$,

$\overline{AC} = \{3-0; 4-5; 6-1\} = \{3; -1; 5\}$

Найдем векторное произведение:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -5 & -1\\ 3 & -1 & 5\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-5 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 5\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}1 & -5\\ 3 & -1\end{vmatrix}=.$$

$=-26\bar{i}-8\bar{j}+14\bar{k}=\{-26;-8;14\}$.

Тогда в качестве нормали к плоскости ABC можно выбрать вектор

$\bar{n}=-\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}=\{13;4;-7\}$. Уравнение плоскости примет вид:

$13(x-x_A)+4(y-y_A)-7(z-z_A)=0$,

$13(x-0)+4(y-5)-7(z-1)=0$,

$13x+4y-20-7z+7=0$,

$13x+4y-7z-13=0$.

Получили $13x+4y-7z-13=0$. Проверим, что точки не лежат в одной плоскости.
Подставим координаты $D(4;5;0)$ в данное уравнение:

$13\cdot4+4\cdot5-7\cdot0-13=52+20-13\neq0$.

Точки не лежат в одной плоскости.

Б) Найдем уравнение прямой AB. В качестве направляющего вектора для прямой AB можно выбрать вектор $\overline{AB}$, тогда канонические уравнения имеют вид:

$$\frac{x-x_A}{1}=\frac{y-y_A}{-5}=\frac{z-z_A}{-1},$$

$$\frac{x}{1}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z-1}{-1}.$$

В) Найдем площадь треугольника ABC по формуле:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-26)^2+(-8)^2+14^2}=\frac{1}{2}\sqrt{936}=3\sqrt{26}.$$

Г) Найдем уравнение и длину высоты H пирамиды $ABCD$, опущенную из вершины D на основание ABC.

Так как высота $DK\perp ABC$, в качестве направляющего вектора DK можно выбрать нормаль к плоскости ABC: $\bar{n}=\{13;4;-7\}$. Так как высота проходит через точку $D(4;5;0)$, уравнение ее имеет вид:

$$\frac{x-x_D}{13}=\frac{y-y_D}{4}=\frac{z-z_D}{-7},$$

$$\frac{x-4}{13}=\frac{y-5}{4}=\frac{z}{-7}.$$

Длина высоты – это расстояние от вершины $D(4;5;0)$ до плоскости ABC:
$13x+4y-7z-13=0$.

$$H=DK=\frac{|13x_D+4y_D-7z_D-13|}{\sqrt{13^2+4^2+(-7)^2}}=\frac{|13\cdot 4+4\cdot 5-7\cdot 0-13|}{3\sqrt{26}}=\frac{52+20-13}{3\sqrt{26}}=\frac{59}{3\sqrt{26}}.$$

Д) Найдем координаты точки K - основания высоты. Для этого запишем параметрические уравнение прямой DK:

$$\begin{cases} x=13t+4, \\ y=4t+5, \\ z=-7t. \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости ABC:

$$13(13t+4)+4(4t+5)-7(-7t)-13=0,$$
$$169t+52+16t+20+49t-13=0,$$
$$234t=-59,$$
$$t=-\frac{59}{234}.$$

Подставляем и находим точку пересечения данной прямой с этой плоскостью:

$$\begin{cases} x=13\left(-\frac{59}{234}\right)+4=\frac{13}{18}, \\ y=4\left(-\frac{59}{234}\right)+5=-\frac{467}{117}, \\ z=-7\left(-\frac{59}{234}\right)=\frac{413}{234}. \end{cases}$$

Точка $K\left(\frac{13}{18};\frac{467}{117};\frac{413}{234}\right)$.

Е) Найдем угол β между ребром DA и основанием ABC.
Найдем координаты вектора $\overline{AD}=\{4-0;5-5;0-1\}=\{4;0;-1\}$.

$$\sin\beta=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{n}}{|\overline{AD}|\cdot|\overline{n}|}=\frac{4\cdot 13+0\cdot 4-1\cdot(-7)}{\sqrt{4^2+0^2+(-1)^2}\sqrt{13^2+4^2+(-7)^2}}=\frac{59}{3\sqrt{17}\sqrt{26}}$$

откуда $\beta=\arcsin\left(\frac{59}{3\sqrt{17}\sqrt{26}}\right)\approx 69{,}3^0$.

Найдем угол между гранями ABC и ADC. Для этого нужно найти нормаль к плоскости ADC.
Найдем векторное произведение:

$$\overline{AD}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & 0 & -1\\ 3 & -1 & 5\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}4 & -1\\ 3 & 5\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}4 & 0\\ 3 & -1\end{vmatrix}=.$$

$=-\bar{i}-23\bar{j}-4\bar{k}=\{-1;-23;-4\}$.

Тогда в качестве нормали к плоскости ADC можно выбрать вектор $\overline{n_2}=-\overline{AD}\times\overline{AC}=\{1;23;4\}$.

Тогда угол γ между гранями ABC и ADC найдем по формуле

$$\cos\gamma=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{13\cdot 1+4\cdot 23-7\cdot 4}{\sqrt{13^2+4^2+(-7)^2}\cdot\sqrt{1^2+23^2+4^2}}=\frac{77}{3\sqrt{26}\sqrt{546}},\text{ откуда}$$

$$\gamma=\arccos\left(\frac{77}{3\sqrt{26}\sqrt{546}}\right)\approx 77,6^0.$$

Ж) Найдем объем пирамиды $ABCD$. Сначала вычислим смешанное произведение:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}1 & -5 & -1\\ 3 & -1 & 5\\ 4 & 0 & -1\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}-5 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & -5\\ 3 & -1\end{vmatrix}=4(-25-1)-(-1+15)=-118.$$

Тогда объем пирамиды равен: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right|=\frac{118}{6}=\frac{59}{3}$.

Сделаем проверку: $V=\frac{1}{3}SH=\frac{1}{3}\frac{59}{3\sqrt{26}}3\sqrt{26}=\frac{59}{3}$. Верно.

Задача 3. Найти угол между векторами $\bar{a}=2\bar{m}+4\bar{n}$ и $\bar{b}=\bar{m}-\bar{n}$, где $\bar{m}$ и $\bar{n}$ - единичные векторы, образующие угол 120^0.

Решение.

Найдем скалярное произведение:

$$(\bar{a},\bar{b})=(2\bar{m}+4\bar{n},\bar{m}-\bar{n})=2(\bar{m},\bar{m})-2(\bar{m},\bar{n})+4(\bar{m},\bar{n})-4(\bar{n},\bar{n})=$$

$$=2|\bar{m}|^2+2(\bar{m},\bar{n})-4|\bar{n}|^2=2+2|\bar{m}|\cdot|\bar{n}|\cos 120^0-4=-2+2\cdot(-1/2)=-2-1=-3.$$

Найдем длины векторов:

$$|\bar{a}|^2=(\bar{a},\bar{a})=(2\bar{m}+4\bar{n},2\bar{m}+4\bar{n})=4(\bar{m},\bar{m})+16(\bar{m},\bar{n})+16(\bar{n},\bar{n})=$$

$$=4|\bar{m}|^2+16|\bar{m}|\cdot|\bar{n}|\cos 120^0+16|\bar{n}|^2=4+16\cdot(-1/2)+16=12.$$

$$|\bar{b}|^2=(\bar{b},\bar{b})=(\bar{m}-\bar{n},\bar{m}-\bar{n})=(\bar{m},\bar{m})-2(\bar{m},\bar{n})+(\bar{n},\bar{n})=$$

$$=|\bar{m}|^2-2|\bar{m}|\cdot|\bar{n}|\cos 120^0+|\bar{n}|^2=1-2\cdot(-1/2)+1=3.$$

Тогда угол α между векторами $\bar{a}=2\bar{m}+4\bar{n}$ и $\bar{b}=\bar{m}-\bar{n}$ равен:

$$\alpha=\arccos\frac{(\bar a,\bar b)}{|\bar a|\cdot|\bar b|}=\arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}}\right)=\arccos\left(-\sqrt{\frac{9}{36}}\right)=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=120^0.$$

Ответ: 120^0.

Задача 4. Раскрыть скобки и упростить выражение
$\left(2\bar i-\bar j\cdot\bar j+(\bar j-2\bar k)\bar k+(\bar i-2\bar k)^2\right)$.

Решение. Используем тот факт, что орты $\bar i,\bar j,\bar k$ имеют единичную длину и перпендикулярны друг другу.
Получаем:

$$\left(2\bar i-\bar j\cdot\bar j+(\bar j-2\bar k)\bar k+(\bar i-2\bar k)^2\right)=$$
$$=\left(2\bar i-|\bar j|^2+\bar j\cdot\bar k-2\bar k\cdot\bar k+\bar i\cdot\bar i-4\bar i\cdot\bar k+4\bar k\cdot\bar k\right)=$$
$$=\left(2\bar i-1+0-2|\bar k|^2+|\bar i|^2-4\cdot 0+4|\bar k|^2\right)=$$
$$=(2\bar i-1-2+1+4)=2\bar i+2.$$

Задача 5. Найти общее решение систем уравнений.

$$\begin{cases}2x_1+x_2-4x_3=5\\3x_1+5x_2-7x_3=12\\4x_1-5x_2-6x_3=1\end{cases}$$

Решение. Расширенную матрицу системы с помощью линейных преобразований строк приведем к ступенчато-треугольному виду.

$$\begin{pmatrix}2&1&-4&5\\3&5&-7&12\\4&-5&-6&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&-4&5\\-7&0&13&-13\\14&0&-26&26\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&-4&5\\-7&0&13&-13\\-7&0&13&-13\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&-4&5\\-7&0&13&-13\end{pmatrix}\to$$
$$\to\begin{pmatrix}2&1&-4&5\\-7/13&0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2/13&1&0&1\\-7/13&0&1&-1\end{pmatrix}$$

Система совместна, так как $r(A)=r(A|b)=2$. Запишем в виде системы:

$$\begin{cases}-2/13x_1+x_2=1,\\-7/13x_1+x_3=-1,\end{cases}$$
$$\begin{cases}x_2=1+2/13x_1,\\x_3=-1+7/13x_1.\end{cases}$$

Фундаментальная система решений однородной СЛАУ $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/13 \\ 7/13 \end{pmatrix}$,

частное решение неоднородной СЛАУ $X_{чн} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Общее решение неоднородной СЛАУ $X = C_1 X_1 + X_{чн} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2/13 \\ 7/13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Задача 6. Дополнить до ортогонального базиса систему векторов.

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Векторы $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}_3$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}_4$, дополняющие $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ до ортогонального базиса, удовлетворяют условиям: $\begin{cases} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}_1) = 0 \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}_2) = 0 \end{cases}$.

Сначала найдем $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}_3$.

Для решения этой системы уравнений преобразуем ее матрицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}.$$

Выберем $\boldsymbol{f}_3 = (1 \quad -1 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$.

Вектор $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}_4$ должен удовлетворять условиям: $\begin{cases} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}_1) = 0 \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}_2) = 0 \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}_3) = 0 \end{cases}$.

Эта система уравнений эквивалентна системе с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & -2 & 0 & -9/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 9/4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9/4 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 9/4 \end{pmatrix}$$

Вектор $\boldsymbol{f}_4 = (-9/4 \quad -9/4 \quad 5/2 \quad 1)^{\mathrm{T}}$.

Получили векторы $\boldsymbol{f}_3$, $\boldsymbol{f}_4$, ортогональные друг другу и векторам $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$.

Примечание: Данные в условии вектора $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ не ортогональны, поэтому базис не будет ортогональным.

Задача 7. Найти проекцию X' и ортогональную составляющую $X^{\perp}$ вектора X на подпространство L.

$X = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{L} = \mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1;\boldsymbol{a}_2)$, если $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Решение. В разложении $X = X' + X^{\perp}$ проекция $X' \in \mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$, т.е. имеет вид $X' = x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2$. Следовательно $X = x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + X^{\perp}$.

Умножив последовательно это равенство скалярно на $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, получим, учитывая ортогональность $X^{\perp}$ подпространству $\mathrm{L}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1)$, следующую систему уравнений
$$\begin{cases} x(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1)+y(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=(\boldsymbol{a}_1,X) \\ x(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1)+y(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2)=(\boldsymbol{a}_2,X) \end{cases}.$$
Для заданных векторов эта система принимает вид
$$\begin{cases} 5x+4y=-1 \\ 4x+5y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x+4y=-1 \\ 4x+5y=1 \end{cases}.$$
Подставив решения системы $x=-1, y=1$ в разложение X', получим $X' = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, а $X^{\perp} = X - X' = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Список литературы

1. *Кремер Н. Ш.* – Высшая математика для экономистов. 2-е изд. М., 2001.

2. *Данко П. Е.* – Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. М., 2002. Ч. I, II.

3. *Колесников А. Н.* – Краткий курс математики для экономистов. М., 2000.

4. *Минорский В. П.* – Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для студентов вузов. М., 1972–1989.

5. *Шипачев В. С.* – Высшая математика. М., 2002.