Задание на домашнюю контрольную работу
Раздел. Функциональные ряды

Задача 1. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2^n}n^2$.

Решение. Найдем радиус сходимости ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}n^2}{2^n(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+1)^2}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^2}=2.$$

То есть ряд сходится абсолютно при

$$|x-3|<2,$$
$$-2<x-3<2,$$
$$1<x<5,$$
$$x\in(1;5).$$

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка.

Пусть $x=5$, получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5-3)^n}{2^n}n^2=\sum_{n=1}^{\infty}n^2$. Этот ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}n^2=\infty\neq 0.$$

Пусть $x=1$, получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-3)^n}{2^n}n^2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2$. Этот ряд также расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости.

Таким образом, область сходимости ряда $x\in(1;5)$.

Задача 2. Вычислить $\frac{1}{\sqrt{e}}$ приближенно с точностью до 0,0001.

Решение.

Используем известное разложение

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{720}x^6\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots.$$

Получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{e}}=e^{-1/2}=e^{-0,5}=$$
$$=1+(-0,5)+\frac{1}{2}(-0,5)^2+\frac{1}{6}(-0,5)^3+\frac{1}{24}(-0,5)^4+\frac{1}{120}(-0,5)^5+\frac{1}{720}(-0,5)^6\ldots=$$
$$=1-0,5+0,125-0,0208+0,0026-0,0003+0,00002-\ldots\approx 0,6065.$$

Так как ряд знакочередующийся, погрешность не превосходит первого отброшенного члена $0,00002<0,0001$.

Задача 3. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}dx$ с точностью до 0,001.

Решение.
Используем известное разложение
$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{720}x^6\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots.$$
Получаем:
$$\int\limits_0^1\frac{1-e^{-x}}{x}dx=\int\limits_0^1\frac{1-\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{720}x^6+\ldots\right)}{x}dx=$$
$$=-\int\limits_0^1\frac{-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{720}x^6+\ldots}{x}dx=$$
$$=-\int\limits_0^1\left(-1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3-\frac{1}{120}x^4+\frac{1}{720}x^5+\ldots\right)dx=$$
$$=-\left(-x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{18}x^3+\frac{1}{96}x^4-\frac{1}{600}x^5+\frac{1}{4320}x^6+\ldots\right)\Bigg|_0^1=$$
$$=-\left(-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{18}+\frac{1}{96}-\frac{1}{600}+\frac{1}{4320}+\ldots\right)=$$
$$=1-0,25+0,056-0,01+0,002-0,0002\approx 0,798.$$

Ответ: 0,798.

Задача 4. Найти первые пять членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y''=-xy$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

Решение. Положим
$$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\ldots$$

Тогда
$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + ...$$
$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + ...$$

Применяя начальное условие $y(0) = 1$, сразу находим $a_0 = 1$.

Применяя начальное условие $y'(0) = 0$, сразу находим $a_1 = 0$.

Тогда $y(x) = 1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + ...$

Теперь подставляем все в уравнение:
$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + ... = -x\left(1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + ...\right),$$
$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + ... = -x - a_2x^3 - a_3x^4 - a_4x^5 - a_5x^6 + ...$$
Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа.

При $x^0 = 1$: $2a_2 = 0$, $a_2 = 0$.

При $x^1 = x$: $6a_3 = -1$, $a_3 = -1/6$.

При x^2: $12a_4 = 0$, $a_4 = 0$.

Получили, что $y(x) = 1 - \frac{1}{6}x^3 + ...$

Задача 5. Разложить в ряд Фурье функцию:
$$y = \begin{cases} x^2 \ \ \textit{при} \ -2 < x < 0, \\ 0 \ \ \textit{при} \ 0 \le x < 2. \end{cases}$$
На отрезке $[-2; 2]$.

Решение. Ряд Фурье для функции $y(x)$ на интервале $[-2; 2]$ имеет вид:
$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi nx}{2} + b_n \sin\frac{\pi nx}{2}\right).$$

Найдем коэффициенты разложения.
$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} x^2dx = \frac{1}{6}x^3\Big|_{-2}^{0} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}..$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}x^2\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\left|\begin{matrix}u=x^2 & du=2xdx\\ dv=\cos\frac{\pi nx}{2} & v=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{x^2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{0}-\frac{2}{\pi n}\int_{-2}^{0}x\sin\frac{\pi nx}{2}dx=\left|\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=\sin\frac{\pi nx}{2} & v=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\left[-\frac{2}{\pi n}x\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{0}+\frac{2}{\pi n}\int_{-2}^{0}\cos\frac{\pi nx}{2}dx\right]=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\left[-\frac{2}{\pi n}(2\cos\pi n)+\frac{4}{(\pi n)^2}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{0}\right]=\frac{8(-1)^n}{(\pi n)^2}.$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}x^2\sin\frac{\pi nx}{2}dx=\left|\begin{matrix}u=x^2 & du=2xdx\\ dv=\sin\frac{\pi nx}{2} & v=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{x^2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{0}+\frac{2}{\pi n}\int_{-2}^{0}x\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\left|\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=\cos\frac{\pi nx}{2} & v=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{4}{\pi n}\cos(-\pi n)+\frac{2}{\pi n}\left[\frac{2}{\pi n}x\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{0}-\frac{2}{\pi n}\int_{-2}^{0}\sin\frac{\pi nx}{2}dx\right]=$$

$$=\frac{4(-1)^n}{\pi n}+\frac{2}{\pi n}\left[\frac{4}{(\pi n)^2}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{0}\right]=\frac{4(-1)^n}{\pi n}+\frac{8\left(1-(-1)^n\right)}{(\pi n)^3}=\frac{4(-1)^n(\pi n)^2+8-8(-1)^n}{(\pi n)^3}.$$

Получаем ряд Фурье: $y(x)=\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8(-1)^n}{(\pi n)^2}\cos\frac{\pi nx}{2}+\frac{4(-1)^n(\pi n)^2+8-8(-1)^n}{(\pi n)^3}\sin\frac{\pi nx}{2}\right].$

Задача 6. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $y=x^2$ на отрезке $[0;1]$.

Решение. Ряд Фурье для функции $y(x)$ на интервале $[-1;1]$ имеет вид:

$$y(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\pi nx+b_n\sin\pi nx\right).$$

Так как строим ряд по синусам, то $y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\pi nx$

Найдем коэффициенты разложения.

$$b_n = 2\int_0^1 y(x)\sin(\pi nx)dx = 2\int_0^1 x^2\sin(\pi nx)dx =$$

$$\begin{vmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \sin(\pi nx) & v = -\dfrac{1}{\pi n}\cos(\pi nx) \end{vmatrix} =$$

$$= -2\frac{x^2}{\pi n}\cos(\pi nx)\Big|_0^1 + 2\frac{2}{\pi n}\int_0^1 x\cos(\pi nx)\,dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos(\pi nx) & v = \dfrac{1}{\pi n}\sin(\pi nx) \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\cos(\pi n) + \frac{4}{\pi n}\left[\frac{1}{\pi n}x\sin(\pi nx)\Big|_0^1 - \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \sin(\pi nx)\,dx\right] =$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} + \frac{4}{\pi n}\left[\frac{1}{(\pi n)^2}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^1\right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} + \frac{4\left((-1)^n - 1\right)}{(\pi n)^3} = \frac{2(-1)^{n+1}(\pi n)^2 - 4 + 4(-1)^n}{(\pi n)^3}.$$

Получаем ряд Фурье:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}(\pi n)^2 - 4 + 4(-1)^n}{(\pi n)^3}\sin\pi nx.$$

Задание на домашнюю контрольную работу
Раздел. Дифференциальные уравнения

Задача 7. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $y'=\dfrac{y^2+4}{x^2+1}$.

Решение. Разделяем переменные:

$$y'=\frac{y^2+4}{x^2+1},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+4}{x^2+1},$$

$$\frac{dy}{y^2+4}=\frac{dx}{x^2+1}.$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{dy}{y^2+4}=\int\frac{dx}{x^2+1},$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2}=\operatorname{arctg}x+C,$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{2}-2\operatorname{arctg}x=2C.$$

Получили общий интеграл: $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{2}-2\operatorname{arctg}x=2C$.

Задача 8. Найти решение дифференциального уравнения $y'-2xy=e^{x^2}\cos x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

Решение. Это линейное неоднородное уравнение. Сначала найдем решение соответствующего однородного уравнения, разделяя переменные и интегрируя:

$$y'-2xy=0,$$

$$\frac{dy}{dx}=2xy,$$

$$\frac{dy}{y}=2xdx,$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx,$$

$$\ln|y|=x^2+\ln C,$$

$$y=Ce^{x^2}.$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде: $y = C(x)e^{x^2}$.

Производная: $y' = C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2}$.

Подставляем:

$C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} = e^{x^2}\cos x,$

$C'(x)e^{x^2} = \cos x e^{x^2},$

$C'(x) = \cos x,$

$C(x) = \int \cos x dx = \sin x + A.$

Общее решение: $y = (\sin x + A)e^{x^2}$, где A - произвольная постоянная.

Найдем постоянную A из начального условия $y(0) = 1$:

$y(0) = (\sin 0 + A)e^0 = 1, \Rightarrow A = 1.$

Искомое решение $y(x) = (\sin x + 1)e^{x^2}$.

Задача 9. Найти решение дифференциального уравнения $y' + 2y = \frac{3}{2}e^{-x}y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$.

Решение. Это уравнение Бернулли. Решение ищем в виде произведения двух функций: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$. Получаем:

$(u'v + uv') + 2uv = \frac{3}{2}e^{-x}u^2v^2,$

$u'v + uv' + 2uv = \frac{3}{2}e^{-x}u^2v^2,$

$u'v + u(v' + 2v) = \frac{3}{2}e^{-x}u^2v^2$. (*)

Выбираем функцию v как частное решение следующего уравнения:

$v' + 2v = 0,$

$\frac{dv}{dx} = -2v,$

$\frac{dv}{v} = -2dx,$

$\int \frac{dv}{v} = -2\int dx,$

$\ln|v| = -2x,$

$v = e^{-2x}.$

Подставляем найденную функцию $v = e^{-2x}$ в уравнение (*), получаем:

$$u'e^{-2x}=\frac{3}{2}e^{-x}u^2\left(e^{-2x}\right)^2,$$

$$u'=\frac{3}{2}e^{-3x}u^2,$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{3}{2}e^{-3x}u^2,$$

$$\frac{du}{u^2}=\frac{3}{2}e^{-3x}dx.$$

Интегрируем:

$$\int\frac{du}{u^2}=\frac{3}{2}\int e^{-3x}dx,$$

$$-\frac{1}{u}=-\frac{1}{2}e^{-3x}-C,$$

$$u=\frac{1}{\frac{1}{2}e^{-3x}+C},$$

$$u=\frac{2}{e^{-3x}+2C}.$$

Тогда общее решение равно: $y=uv=\dfrac{2e^{-2x}}{e^{-3x}+2C}$. Найдем постоянную C из начального условия $y(0)=2$. Получаем:

$$y(0)=\frac{2e^0}{e^0+2C}=2,\Rightarrow C=0.$$

Решение задачи Коши: $y=\dfrac{2e^{-2x}}{e^{-3x}}=\dfrac{2}{e^{-x}}$.

Задача 10. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+\dfrac{y'}{x}=9x$.

Решение. Так как в уравнение явно не входит функция y, делаем замену: $z=y'$, тогда $z'=y''$. Приходим к уравнению:

$$z'+\frac{z}{x}=9x.$$

Это линейное неоднородное уравнение первого порядка.
Сначала решаем соответствующее однородное уравнение:

$$z'+\frac{z}{x}=0,$$

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{z}{x},$$

$$\frac{dz}{z}=-\frac{dx}{x},$$

Интегрируем

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|z| = -\ln|x| + \ln|C|,$$

$$z = \frac{C}{x}.$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде $z = \frac{C(x)}{x}$.

Производная $z = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$. Подставляем:

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = 9x,$$

$$C'(x) = 9x^2,$$

$$C(x) = \int 9x^2 dx = 3x^3 + C_1.$$

Получаем решение $z = \frac{3x^3 + C_1}{x} = 3x^2 + \frac{C_1}{x}$.

Возвращаемся к функции y, получаем уравнение: $y' = 3x^2 + \frac{C_1}{x}$. Интегрируем:

$$y = \int \left(3x^2 + \frac{C_1}{x}\right) dx = x^3 + C_1 \ln|x| + C_2.$$

Нашли общее решение: $y(x) = x^3 + C_1 \ln|x| + C_2$.

Задача 11. Найти решение дифференциального уравнения $y'' = 6y^2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(2) = \frac{1}{4}$, $y'(2) = -\frac{1}{4}$.

Решение. Так как уравнение не содержит в явном виде переменной x, делаем замену $y' = p = p(y)$, $y'' = p'p$. Подставляем:

$p'p = 6y^2,$

$\frac{dp}{dy}p = 6y^2,$

$pdp = 6y^2dy,$

$\int pdp = \int 6y^2dy,$

$\frac{1}{2}p^2 = 2y^3 + C_1,$

$p^2 = 4y^3 + 2C_1,$

$p = \pm\sqrt{4y^3 + 2C_1}.$

Получили $y' = \pm\sqrt{4y^3 + 2C_1}$. Найдем постоянную C_1 и знак перед корнем из начального условия $y(2) = \frac{1}{4}$, $y'(2) = -\frac{1}{4}$.

$-\frac{1}{4} = -\sqrt{4\frac{1}{64} + 2C_1},$

$\frac{1}{16} = \frac{1}{16} + 2C_1,$

$C_1 = 0.$

Значит, $y' = -\sqrt{4y^3} = -2y^{3/2}$.

Интегрируем полученное уравнение:

$y' = -2y^{3/2},$

$y^{-3/2}dy = -2dx,$

$\int y^{-3/2}dy = -2\int dx,$

$-2y^{-1/2} = -2x - 2C_2,$

$\frac{1}{\sqrt{y}} = x + C_2,$

$y = \frac{1}{(x + C_2)^2}.$

Найдем постоянную C_2 из начального условия $y(2) = \frac{1}{4}$:

$y(2) = \frac{1}{(2 + C_2)^2} = \frac{1}{4}, \Rightarrow C_2 = 0.$

Искомое решение: $y(x) = \frac{1}{x^2}$.

Задача 12. Найти решение дифференциального уравнения
$y''+8y'+7y=(27x+12)e^{2x}-6e^{-7x}$, удовлетворяющее начальным условиям
$y(0)=0,\ y'(0)=0$.

Решение. Это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Сначала решим соответствующее однородное уравнение $y''+2y'=0$. Составляем соответствующее характеристическое уравнение:
$k^2+8k+7=0,$
$D=64-28=36$
$k_{1,2}=\dfrac{-8\pm 6}{2}=-7,\ -1.$

Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{o.o.}(x)=C_1e^{-7x}+C_2e^{-x}$.

Найдем частное решение неоднородного уравнения по виду правой части.

1) $f_1=(27x+12)e^{2x}$. Будем искать его в виде $y_1=(Ax+B)e^{2x}$. Умножили на x, так как $k=-2$ - корень характеристического уравнения. Найдем производные:
$y_1'=(A+2Ax+2B)e^{2x}$,
$y_1''=(2A+2A+4Ax+4B)e^{2x}=(4A+4Ax+4B)e^{2x}$..
Подставляем в уравнение:
$(4A+4Ax+4B)e^{2x}+8(A+2Ax+2B)e^{2x}+7(Ax+B)e^{2x}=(27x+12)e^{2x}$,
$4A+4Ax+4B+8A+16Ax+16B+7Ax+7B=(27x+12)$,
$x(4A+16A+7A)+(4A+4B+8A+16B+7B)=27x+12,$
$27Ax+(12A+27B)=27x+12.$
Приравниваем коэффициенты при степенях x справа и слева:
$\begin{cases}27A=27,\\12A+27B=12;\end{cases}$
$\begin{cases}A=1,\\B=0.\end{cases}$
Получили $y_1=xe^{2x}$.

2) $f_2=-6e^{-7x}$. Будем искать его в виде $y_2=Axe^{-7x}$. Умножили на x, так как $k=-7$ - корень характеристического уравнения. Найдем производные:
$y_2'=(A-7Ax)e^{-7x}$, $y_2''=(-7A-7A+49Ax)e^{-7x}=(-14A+49Ax)e^{-7x}$.
Подставляем в уравнение:

$$\left(-14A+49Ax\right)e^{-7x}+8\left(A-7Ax\right)e^{-7x}+7Axe^{-7x}=-6e^{-7x},$$
$$-14A+49Ax+8A-56Ax+7Ax=-6,$$
$$-6A=-6,$$
$$A=1.$$

Получили $y_2=xe^{-7x}$

Тогда общее решение исходного неоднородного уравнения равно:
$$y_{о.н.}(x)=y_{о.о.}+y_1+y_2=C_1e^{-7x}+C_2e^{-x}+xe^{2x}+xe^{-7x}.$$

Найдем постоянные C_1,C_2 из начальных условий: $y(0)=0,\ y'(0)=0$. Вычислим производную решения:
$$y_{о.н.}'(x)=\left(C_1e^{-7x}+C_2e^{-x}+xe^{2x}+xe^{-7x}\right)'=$$
$$=-7C_1e^{-7x}-C_2e^{-x}+e^{2x}+e^{-7x}+2xe^{2x}-7xe^{-7x}.$$

Подставляем:
$$\begin{cases} y_{о.н.}(0)=C_1+C_2=0,\\ y_{о.н.}'(0)=-7C_1-C_2+2=0.\end{cases}$$
$$\begin{cases} C_1+C_2=0,\\ 7C_1+C_2=2.\end{cases}$$
$$\begin{cases} C_1=\dfrac{1}{3},\\ C_2=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Подставляем:
$$y(x)=\frac{1}{3}e^{-7x}-\frac{1}{3}e^{-x}+xe^{2x}+xe^{-7x}.$$

Задача 13. Найти общее решение дифференциального уравнения
$y''+5y'+4y=20\sin 2x+30\cos 2x$.

Решение. Это линейное неоднородное уравнение второго порядка. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение $y''+5y'+4y=0$. Составим и решим характеристическое уравнение:
$$k^2+5k+4=0,$$
$$D=25-4\cdot 4=9,$$
$$k_{1,2}=\frac{-5\pm 3}{2}=-4,\ -1.$$

Получаем $y_{о.о.}=C_1e^{-4x}+C_2e^{-x}$.

Найдем частное решение неоднородного уравнения по виду правой части:
$y_{ч.н.} = A\sin 2x + B\cos 2x$.
Находим производные:
$y_{ч.н.}' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$
$y_{ч.н.}'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x.$

Подставляем:
$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x + 5(2A\cos 2x - 2B\sin 2x) + 4(A\sin 2x + B\cos 2x) = 20\sin 2x + 30\cos 2x,$
$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x + 10A\cos 2x - 10B\sin 2x + 4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 20\sin 2x + 30\cos 2x,$
$(-4A - 10B + 4A)\sin 2x + (-4B + 10A + 4B)\cos 2x = 20\sin 2x + 30\cos 2x,$
$-10B\sin 2x + 10A\cos 2x = 20\sin 2x + 30\cos 2x,$
$B = -2,\ A = 3.$
$y_{ч.н.} = 3\sin 2x - 2\cos 2x$.

Искомое решение:
$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.} = C_1e^{-4x} + C_2e^{-x} + 3\sin 2x - 2\cos 2x.$

Задача 14. Найти общее решение дифференциального уравнения
$y''' - 3y'' + 3y' - y = x^3 - 9x^2 + 18x - 6$.

Решение. Это линейное неоднородное уравнение третьего порядка. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$. Составим и решим характеристическое уравнение:
$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0,$
$(k-1)^3 = 0$
$k_{1,2,3} = 1.$
Получаем $y_{о.о.} = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$

Найдем частное решение неоднородного уравнения по виду правой части.

$f = x^3 - 9x^2 + 18x - 6$. Частное решение ищем в виде $y_{ч.н.} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.
Находим производные: $y_{ч.н.}' = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $y_{ч.н.}'' = 6Ax + 2B$, $y_{ч.н.}''' = 6A$
Подставляем:
$6A - 3(6Ax + 2B) + 3(3Ax^2 + 2Bx + C) - (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = x^3 - 9x^2 + 18x - 6,$
$6A - 18Ax - 6B + 9Ax^2 + 6Bx + 3C - Ax^3 - Bx^2 - Cx - D = x^3 - 9x^2 + 18x - 6,$
Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x справа и слева:

$$\begin{cases} -A=1, \\ 9A-B=-9, \\ -18A+6B-C=18, \\ 6A-6B+3C-D=-6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=1, \\ B=0, \\ C=0, \\ D=0. \end{cases}$$

То есть: $y_{ч.н.}=-x^3$

Тогда общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид:
$y_{о.н.}=y_{о.о.}+y_{ч.н.}=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x-x^3$.

Задача 15. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x-3y, \\ \dfrac{dy}{dt}=3x-4y, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=1,\ y(0)=1$.

Решение. Запишем систему в следующем виде:

$$\begin{cases} x'=2x-3y, \\ y'=3x-4y. \end{cases}$$

Дифференцируем первое уравнение по t, получаем:
$x''=2x'-3y'$.

Подставляем из второго уравнения y':

$$x''=2x'-3(3x-4y),$$
$$x''=2x'-9x+12y.$$

Из первого уравнения выражаем $3y=2x-x'$ и подставляем:

$$x''=2x'-9x+4(2x-x'),$$
$$x''-2x'+9x-8x+4x'=0,$$
$$x''+2x'+x=0.$$

Решаем получившееся уравнение. Составляем характеристическое уравнение:

$$k^2+2k+1=0,$$
$$(k+1)^2=1,$$
$$k_{1,2}=-1.$$

Получаем $x(t)=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}$.

Подставляем в $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}x'$, чтобы найти вторую неизвестную функцию:

$$y=\frac{2}{3}\left(C_1e^{-t}+C_2te^{-t}\right)-\frac{1}{3}\left(C_1e^{-t}+C_2te^{-t}\right)'=\frac{1}{3}\left[2C_1e^{-t}+2C_2te^{-t}+C_1e^{-t}-C_2e^{-t}+C_2te^{-t}\right]=$$
$$=\frac{1}{3}\left[3C_1e^{-t}+3C_2te^{-t}-C_2e^{-t}\right]=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}-\frac{1}{3}C_2e^{-t}.$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x(t)=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}, \\ y(t)=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}-\frac{1}{3}C_2e^{-t}. \end{cases}$$

Найдем неизвестные постоянные из начальных условий: $x(0)=y(0)=1$.

$$\begin{cases} x(t)=C_1=1, \\ y(t)=C_1-\frac{1}{3}C_2=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1=1, \\ C_2=0. \end{cases}$$

Получаем нужное решение задачи Коши:

$$\begin{cases} x(t)=e^{-t}, \\ y(t)=e^{-t}. \end{cases}$$