Курсовая работа на тему «Неопределенные и определенные интегралы»

Часть 1. Вычисление интегралов

Найти неопределённые интегралы

1. $\int x^2 \sqrt[5]{x^3+3}\, dx$;

Решение.

$$\int x^2 \sqrt[5]{x^3+3}\, dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \sqrt[5]{x^3+3}\, dx = \frac{1}{3}\int \sqrt[5]{x^3+3}\, d\left(x^3\right) = \frac{1}{3}\int \left(x^3+3\right)^{1/5} d\left(x^3+3\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\left(x^3+3\right)^{1/5+1}}{1/5+1} + C = \frac{1}{3}\frac{\left(x^3+3\right)^{6/5}}{6/5} + C = \frac{5}{18}\sqrt[5]{\left(x^3+3\right)^6} + C.$$

2. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$;

Решение.

$$\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx = \left| т.к.\ \left(\operatorname{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} \right| = \int \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}\, d\left(\operatorname{tg} x\right) = \int \left(\operatorname{tg} x\right)^{1/3} d\left(\operatorname{tg} x\right) =$$

$$= \frac{\left(\operatorname{tg} x\right)^{1/3+1}}{1/3+1} + C = \frac{3}{4}\left(\operatorname{tg} x\right)^{4/3} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^4 x} + C.$$

3. $\int \operatorname{tg} x\, dx$;

Решение.

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left| т.к.\ \left(\cos x\right)' = -\sin x \right| = -\int \frac{1}{\cos x} d\left(\cos x\right) = -\ln|\cos x| + C.$$

4. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$;

Решение.

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{d\left(e^x\right)}{1+\left(e^x\right)^2} = \operatorname{arctg} e^x + C.$$

5. $\int x \cos 2x\, dx$;

Решение. Интегрируем по частям:

$$\int x\cos(2x)\,dx=\left|\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos(2x)\,dx & v=\frac{1}{2}\sin(2x)\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}x\sin(2x)-\frac{1}{2}\int\sin(2x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}x\sin(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)+C.$$

6. $\int\frac{x^7}{(1+x^4)^2}dx$;

Решение.

$$\int\frac{x^7}{(1+x^4)^2}dx=\int\frac{x^4}{(1+x^4)^2}x^3dx=\frac{1}{4}\int\frac{x^4}{(1+x^4)^2}\left(4x^3\right)dx=\frac{1}{4}\int\frac{x^4}{(1+x^4)^2}d\left(x^4\right)=$$

$$=\left|\text{замена}\quad y=x^4\right|=\frac{1}{4}\int\frac{y}{(1+y)^2}dy=\frac{1}{4}\int\frac{y+1-1}{(1+y)^2}dy=\frac{1}{4}\int\frac{y+1}{(1+y)^2}dy-\frac{1}{4}\int\frac{dy}{(1+y)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{(1+y)}d(y+1)-\frac{1}{4}\int\frac{d(y+1)}{(1+y)^2}=\frac{1}{4}\ln|y+1|+\frac{1}{4}\frac{1}{y+1}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|x^4+1\right|+\frac{1}{4}\frac{1}{x^4+1}+C.$$

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

Решение. Делаем замену переменной: $t=x^{1/6}$, $x=t^6$, $dx=6t^5dt$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}dt=6\int\frac{t^3}{t+1}dt=$$

Выделяем целую и дробную часть:

$$\begin{array}{l|l} t^3 & t+1 \\ \hline \underline{t^3+t^2} & t^2-t+1 \\ -t^2 & \\ \underline{-t^2-t} & \\ t & \\ \underline{t+1} & \\ -1 & \end{array}$$

Получили

$$=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C=$$

$$=2\left(\sqrt[6]{x}\right)^3-3\left(\sqrt[6]{x}\right)^2+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$;

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{4\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{(2\sin x \cos x)^2} = \int \frac{4dx}{(\sin 2x)^2} =$$

$$= \int \frac{2d(2x)}{(\sin 2x)^2} = -2\,\mathrm{ctg}(2x) + C.$$

9. $\int \frac{5x^3 - 14x^2 + 16x - 24}{(x^2+4)(x-2)^2}\,dx$.

Решение. Разложим подынтегральное выражение на сумму элементарных дробей:

$$\frac{5x^3 - 14x^2 + 16x - 24}{(x^2+4)(x-2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2},$$

$$5x^3 - 14x^2 + 16x - 24 = (Ax+B)(x-2)^2 + C(x^2+4)(x-2) + D(x^2+4),$$

$$5x^3 - 14x^2 + 16x - 24 = A(x^3 - 4x^2 + 4x) + B(x^2 - 4x + 4) + C(x^3 - 2x^2 + 4x - 8) + D(x^2+4).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x справа и слева.

$$\begin{cases} A + C = 5, \\ -4A + B - 2C + D = -14, \\ 4A - 4B + 4C = 16, \\ 4B - 8C + 4D = -24. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \\ C = 3 \\ D = -1. \end{cases}$$

Получили $\frac{5x^3 - 14x^2 + 16x - 24}{(x^2+4)(x-2)^2} = \frac{2x+1}{x^2+4} + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2}$

Интегрируем:

$$\int \frac{5x^3 - 14x^2 + 16x - 24}{(x^2+4)(x-2)^2}dx = \int \frac{2x+1}{x^2+4}dx + \int \frac{3}{x-2}dx - \int \frac{1}{(x-2)^2}dx =$$

$$= \int \frac{2xdx}{x^2+4} + \int \frac{1}{x^2+4}dx + 3\ln|x-2| + \frac{1}{x-2} =$$

$$= \ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2} + 3\ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + C.$$

Вычислить определённые интегралы

10. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x dx$;

Решение.
Сначала вычислим неопределенный интеграл, интегрируя по частям:

$$\int (\operatorname{arctg} x)dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right| = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x dx = \left(\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \right)\Bigg|_0^1 = \left(\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\ln(1+1) \right) - \left(0 - \frac{1}{2}\ln(1+0) \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

11. $\int\limits_0^\pi \cos 2x \sin 3x dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию по известным формулам из тригонометрии:

$$\int\limits_0^\pi \cos 2x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi (\sin(3x-2x) + \sin(3x+2x))dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi (\sin x + \sin 5x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\cos x - \frac{1}{5}\cos 5x \right)\Bigg|_0^\pi = \frac{1}{2}\left(-\cos\pi - \frac{1}{5}\cos 5\pi \right) - \frac{1}{2}\left(-\cos 0 - \frac{1}{5}\cos 0 \right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{5} + 1 + \frac{1}{5} \right) = \frac{6}{5}.$$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость

12. $\int\limits_e^\infty \frac{dx}{x\ln x}$;

Решение.

$$\int\limits_e^\infty \left(\frac{1}{x\ln x} \right)dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_e^A \left(\frac{1}{x\ln x} \right)dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_e^A \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{A\to+\infty} (\ln(\ln x))\Big|_e^A =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left[\ln(\ln A) - \ln(\ln e) \right] = \infty.$$

Интеграл расходится.

13. $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$.

Решение.

$$\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{2xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left.\sqrt{x^2-1}\right|_{1+\varepsilon}^2\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{2^2-1} - \sqrt{(1+\varepsilon)^2-1}\right) = \sqrt{3}.$$

Интеграл сходится.

Выяснить сходимость несобственных интегралов

14. $\int\limits_1^\infty \frac{x\cos x}{2+x^3}dx$;

Решение.
Это интеграл с неограниченным пределом. Исследуем подынтегральную функцию:
$\frac{x\cos x}{2+x^3} \sim \frac{x}{2+x^3} \sim \frac{1}{x^2}$, $x\to\infty$ (функция $\cos x$ ограничена и не влияет на поведение при $x\to\infty$).

Подынтегральная функция является бесконечно малой порядка $\lambda = 2 > 1$ по сравнению с $1/x$, поэтому интеграл сходится.

15. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x}\sin^2 x}$.

Решение. Это интеграл с неограниченной функцией при $x=0$. Исследуем подынтегральную функцию:

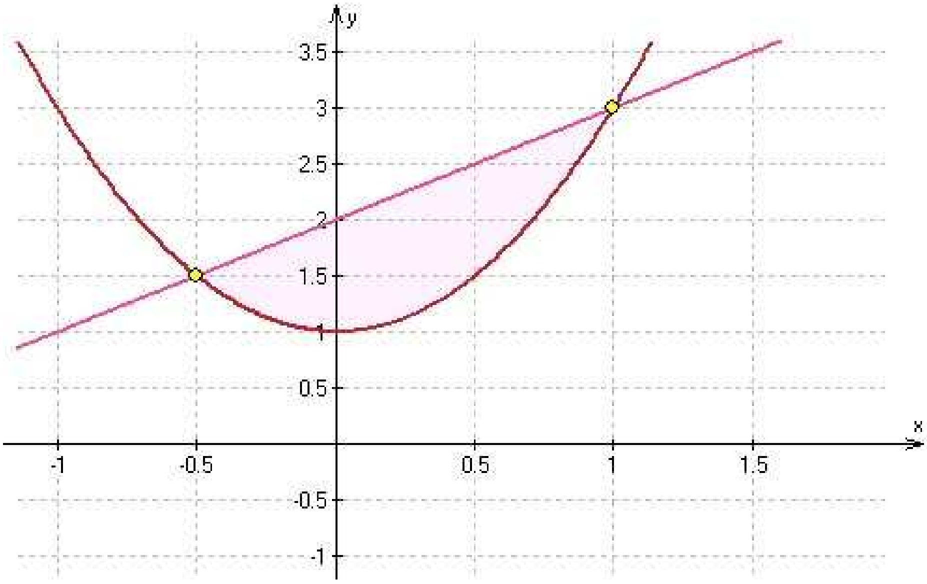
$$\frac{x}{\sqrt{x}\sin^2 x} = \frac{\sqrt{x}}{\sin^2 x} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}},\ x\to 0$$

Получаем, что подынтегральная функция является бесконечно большой при $x\to 0$ порядка $\lambda = 3/2 > 1$ по сравнению с $\frac{1}{x}$. По частному признаку сравнения данный интеграл расходится.

16. Найти площадь области, ограниченной кривыми

$$y = 2x^2+1,\ \ y = x+2.$$

Решение. Сделаем чертеж кривых (парабола и прямая линия), закрасим нужную область:



Получаем, что площадь равна:

$$S=\int\limits_{-1/2}^{1}\left(x+2-2x^2-1\right)dx=\int\limits_{-1/2}^{1}\left(x+1-2x^2\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+x-\frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1/2}^{1}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+1-\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right)=\frac{9}{8}.$$

17. Найти длину дуги кривой

$$x=2\cos t,\;\; y=2\sin t,\;\;\; z=t,\;\;\; 0\le t\le\pi\,.$$

Решение. Вычислим:

$x'=-2\sin t,\; y'=2\cos t,\; z'=1,$

$$dl=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t+1}\,dt=\sqrt{4+1}\,dt=\sqrt{5}\,dt.$$

Тогда длина дуги равна:

$$L=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{5}dt=\sqrt{5}t\Big|_0^{\pi}=\sqrt{5}\pi.$$

Часть 2. Кратные и криволинейные интегралы

1. Вычислить $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, если D - внутренность треугольника с вершинами в точках $A(0,1), B(1,0), C(2,2)$.

Решение. Сделаем чертеж треугольника, узнаем уравнения его сторон:

AB:

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1}{0-1},$$

$$-x = y-1,$$

$$y = 1-x.$$

AC:

$$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-1}{2-1},$$

$$x = 2y-2,$$

$$y = \frac{1}{2}x+1.$$

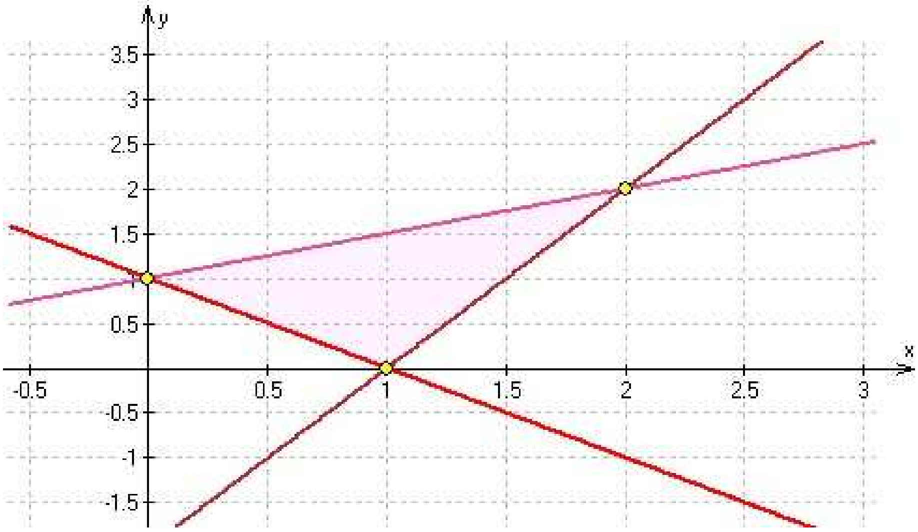
BC:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{2-0},$$

$$2x-2 = y,$$

$$y = 2x-2.$$

Получаем:



Вычисляем интеграл:

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{1/2x+1} (x+y)\,dy + \int_1^2 dx \int_{2x-2}^{1/2x+1} (x+y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left(xy + \frac{1}{2}y^2 \right)\Bigg|_{1-x}^{1/2x+1} + \int_1^2 dx \left(xy + \frac{1}{2}y^2 \right)\Bigg|_{2x-2}^{1/2x+1} =$$

$$= \int_0^1 \left[\left(x\left(\frac{1}{2}x+1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2 \right) - \left(x(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2 \right) \right] dx +$$

$$+ \int_1^2 \left[\left(x\left(\frac{1}{2}x+1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2 \right) - \left(x(2x-2) + \frac{1}{2}(2x-2)^2 \right) \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{9}{8}x^2 + \frac{3}{2}x \right] dx + \int_1^2 \left[-\frac{27}{8}x^2 + \frac{15}{2}x - \frac{3}{2} \right] dx =$$

$$= \left[\frac{3}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \right]\Bigg|_0^1 + \left[-\frac{9}{8}x^3 + \frac{15}{4}x^2 - \frac{3}{2}x \right]\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \left(-\frac{9}{8}8 + \frac{15}{4}4 - \frac{3}{2}2 \right) - \left(-\frac{9}{8} + \frac{15}{4} - \frac{3}{2} \right) = 3.$$

2. Изменить порядок интегрирования

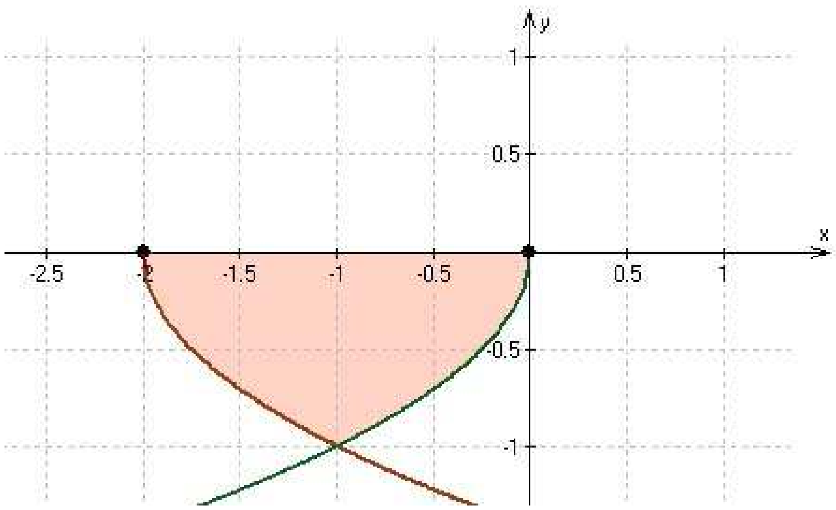
$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2+x}}^{0} f(x,y)dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{-x}}^{0} f(x,y)dy .$$

Решение.

Сделаем чертеж области.

$y = -\sqrt{2+x}, \Rightarrow x+2 = y^2,\ x = y^2 - 2$.

$y = -\sqrt{-x},\ -x = y^2,\ x = -y^2$.

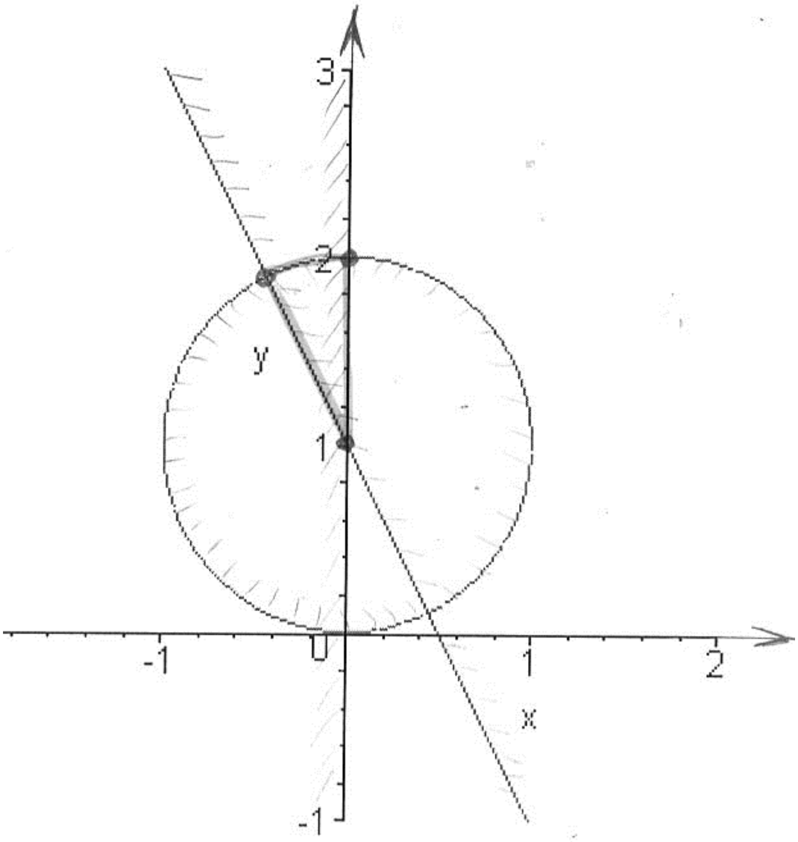


Меняем порядок интегрирования:

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2+x}}^{0} f(x,y)dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{-x}}^{0} f(x,y)dy = \int_{-1}^{0} dy \int_{y^2-2}^{-y^2} f(x,y)dx .$$

3. Вычислить площадь области, заданной неравенствами
$x^2+(y-r)^2\le r^2,\ x\le 0,\ -2x+r\le y,$ перейдя предварительно к полярным координатам.

Решение.
Сделаем схематический чертеж области (положим $r=1$ на чертеже).
$x^2+(y-r)^2\le r^2$ - область внутри окружности радиуса r с центром $(0;r)$.
$x\le 0$ - полуплоскость.
$-2x+r\le y,$ - полуплоскость.



Переходим к полярным координатам.
$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y-r=\rho\sin\varphi. \end{cases}$$
Тогда $dxdy=\rho d\rho d\varphi$, $\rho^2=x^2+(y-r)^2$.
$$-2\rho\cos\varphi+r\le\rho\sin\varphi+r,$$
$$-2\cos\varphi\le\sin\varphi,$$
$$\operatorname{tg}\varphi\le -2.$$
Получаем: $0<\rho<r,\ \pi/2<\varphi<\pi-\operatorname{arctg}2$.

Площадь области:

$$S=\int_{\pi/2}^{\pi-\operatorname{arctg}2}d\varphi\int_0^r\rho d\rho=\frac{1}{2}\left(\pi-\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{2}\right)\rho^2\Big|_0^r=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}2\right)r^2.$$

4. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$x=0,\ z=0,\ y=3x,\ z=\sqrt{y},\ y=2.$$

Решение. Записываем объем тела как тройной интеграл, переходим к повторному и вычисляем:

$$V=\iiint_V dxdydz=\iint_D dxdy\int_0^{\sqrt{y}}dz=\iint_D\sqrt{y}dxdy=$$

Здесь D - это проекция тела на плоскость xOy, треугольник, ограниченный линиями: $x=0,\ y=3x, y=2$.

$$=\iint_D\sqrt{y}dxdy=\int_0^{2/3}dx\int_{3x}^2\sqrt{y}dy=\int_0^{2/3}dx\frac{2}{3}\sqrt{y^3}\Big|_{3x}^2=\frac{2}{3}\int_0^{2/3}\left(\sqrt{8}-\sqrt{27x^3}\right)dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{2/3}\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}x^{3/2}\right)dx=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}x-\frac{6\sqrt{3}}{5}x^{5/2}\right)\Bigg|_0^{2/3}=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}\frac{2}{3}-\frac{6\sqrt{3}}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{5/2}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{2}\frac{4}{3}-\frac{6\sqrt{2}}{5}\frac{4}{9}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{2}\frac{4}{3}\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{8}{15}\sqrt{2}.$$

5. Вычислить интеграл (в цилиндрических или сферических координатах) $\iiint_V yx\,dxdydz$, где V - область, заданная неравенствами $x^2+y^2+z^2\le 4,\ x^2+y^2+z^2\ge 9,\ z\ge 0.$

Решение. Данное тело не существует, так как не может быть одновременно $x^2+y^2+z^2\le 4$ и $x^2+y^2+z^2\ge 9$.

6. Найти работу силы $f(x,y)=(x^2-y)\mathbf{i}-(x-y)\mathbf{j}$ по перемещению точки вдоль участка кривой $x=2\cos t,\ y=2\sin t,\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

Решение. Работа силы равна криволинейному интегралу:

$$A=\int_L \left(x^2-y\right)dx+\left(y-x\right)dy=\int_0^{\pi/2}\left[\left(4\cos^2 t-2\sin t\right)\left(-2\sin t\right)+\left(2\sin t-2\cos t\right)2\cos t\right]dt=$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\left[-2\cos^2 t\sin t+\sin^2 t+\sin t\cos t-\cos^2 t\right]dt=$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\left[-2\cos^2 t\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t-\cos 2t\right]dt=$$

$$=8\int_0^{\pi/2}\cos^2 td\left(\cos t\right)+2\int_0^{\pi/2}\sin 2tdt-4\int_0^{\pi/2}\cos 2tdt=$$

$$=\frac{8}{3}\cos^3 t\Big|_0^{\pi/2}-\cos 2t\Big|_0^{\pi/2}-2\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}=-\frac{8}{3}+2=-\frac{2}{3}.$$

7. Проверить, что поле $F=(6x+7yz)\mathbf{i}+(6y+7xz)\mathbf{j}+(6z+7xy)\mathbf{k}$ потенциально и восстановить потенциал.

Решение. Проверим, будет ли поле потенциальным. Вычислим вихрь:

$$\operatorname{rot}\overline{F}=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 6x+7yz & 6y+7xz & 6z+7xy\end{vmatrix}=$$

$$=\bar i\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(6x+7xy\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(6y+7xz\right)\right)-\bar j\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(6z+7xy\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(6x+7yz\right)\right)+$$

$$+\bar k\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(6y+7xz\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(6x+7yz\right)\right)=$$

$$=\bar i\left(7x-7x\right)-\bar j\left(7y-7y\right)+\bar k\left(7z-7z\right)=0.$$

Поле потенциально.

Следовательно, криволинейный интеграл $\int_{A_0}^{A} P\,dx+Q\,dy+Rdz$ по любому пути, соединяющему две точки, не зависит от пути интегрирования. В качестве начальной точки интегрирования A_0 выберем начало координат $(0,0,0)$. Конечную точку возьмем произвольную с координатами (x,y,z). Наиболее простыми путями интегрирования являются возможные ломаные, состоящие из отрезков прямых, параллельных координатным осям. Получаем:

$$U(x,y,z)=\int_{A_0}^{A}(f,\overline{dl})=\int_0^x P(x,0,0)\,dx+\int_0^y Q(x,y,0)\,dy+\int_0^z R(x,y,z)\,dz=$$

$$=\int_0^x\left(6x+0\right)dx+\int_0^y(6y+0)\,dy+\int_0^z(6z+7xy)\,dz=3x^2+3y^2+3z^2+7xyz.$$

Таким образом, потенциал поля $U(x,y,z)=3x^2+3y^2+3z^2+7xyz+C$.

8. Вычислить поток вектора $f = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через часть поверхности $x + y + 3z = 2$, лежащую в первом октанте.

Решение. Поток вектора через поверхность равен поверхностному интегралу второго рода $I = \iint_S xdydz + 2ydxdz + zdxdy$. Будем проектировать поверхность (плоскость) на плоскость xOy. Так как явное уравнение поверхности $z = \dfrac{2-x-y}{3}$, то $z'_x = -\dfrac{1}{3},\ z'_y = -\dfrac{1}{3}$.

Выбираем направление внешней нормали $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};1\right)$. Поэтому

$$I = \iint_D \left(x\left(+\frac{1}{3}\right) + 2y\left(+\frac{1}{3}\right) + \frac{2-x-y}{3} \right) dxdy = \frac{1}{3}\iint_D (x + 2y + 2 - x - y)\,dxdy =$$

$$= \frac{1}{3}\iint_D (y+2)\,dxdy =$$

Теперь переходим к повторному интегралу на плоскости по области D, ограниченной линиями $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2.$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 dx \int_0^{2-x} (y+2)\,dy = \frac{1}{3}\int_0^2 dx \left(\frac{1}{2}y^2 + 2y \right)\Bigg|_0^{2-x} = \frac{1}{3}\int_0^2 \left[\left(\frac{1}{2}(2-x)^2 + 2(2-x) \right) - 0 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^2 \left[4 - 4x + x^2 + 8 - 4x \right] dx = \frac{1}{6}\int_0^2 \left[x^2 + 12 - 8x \right] dx = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}x^3 + 12x - 4x^2 \right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}8 + 24 - 16 \right) = \frac{16}{9}.$$

9. Вычислить поток вектора $f = x^2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность $z = x^2 + y^2,\ z = 1.$

Решение. Используем формулу Остроградского-Гаусса:

$$\Pi = \oiint_S \overline{f} \cdot \overline{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \overline{f} dV.$$

Вычисляем дивергенцию поля:

$$\operatorname{div} \overline{f} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 2x + 2 + 1 = 2x + 3.$$

Тогда поток равен:

$\Pi = \oiint_S \overline{f} \cdot \overline{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \overline{f} dV = \iiint_V (2x+3)\,dV =$, где V - тело, ограниченное снизу параболоидом $z = x^2 + y^2$, сверху плоскостью $z = 1$. Проекция тела D на плоскость xOy - это круг $x^2 + y^2 = 1$ радиуса 1.

Продолжаем преобразования:

$$= \iint_D (2x+3)\,dxdy \int_{x^2+y^2}^{1} dz = \iint_D (2x+3)(1 - x^2 - y^2)\,dxdy =$$

Переходим к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Тогда $dxdy = rdrd\varphi$, $r^2 = x^2 + y^2$.

Ограничения: $0 < r < 1,\ 0 < \varphi < 2\pi$.

Получаем:

$$= \iint\limits_D \left(2r\cos\varphi + 3\right)\left(1 - r^2\right) rdrd\varphi = \iint\limits_D \left(2r\cos\varphi + 3\right)\left(r - r^3\right) drd\varphi =$$

$$= \iint\limits_D \left(2r^2\cos\varphi + 3r - 2r^4\cos\varphi - 3r^3\right) drd\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(2r^2\cos\varphi + 3r - 2r^4\cos\varphi - 3r^3\right) dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{2}{3}r^3\cos\varphi + \frac{3}{2}r^2 - \frac{2}{5}r^5\cos\varphi - \frac{3}{4}r^4\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3}\cos\varphi + \frac{3}{2} - \frac{2}{5}\cos\varphi - \frac{3}{4}\right) d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{4}{15}\cos\varphi + \frac{3}{4}\right) d\varphi = \left(\frac{4}{15}\sin\varphi + \frac{3}{4}\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3}{4}2\pi = \frac{3}{2}\pi.$$

Список литературы

1) Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб.-практ. Пособие/ Г.Н. Берман. – СПб.: Профессия, 2001.
2) Высшая математика для экономистов. Под редакцией Кремера Н.Ш.- Москва: ЮНИТИ, 2000.
3) Зорич, В.А. Математический анализ: в 2 т./ В.А. Зорич. – М.: Наука, 1984.
4) Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, - 1989, 656с.
5) Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математиче ского анализа / под ред. А.В.Ефимова, Б.П. Демидовича. - М.: Наука, 2001. - 368 с.
6) Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления/ Г.М. Фихтенгольц. – М.:Физматгиз,1962.