Практическая работа по математике с решением

Задача 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{3x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{4x^5+x+1}$

Решение. Вычисляем пределы.

А) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}=\left(1^{\infty}\right)=$

Сведем ко второму замечательному пределу: $\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}\to e,\ t\to\infty$ и получим

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{3}=\lim_{x\to\infty}e^{3}=e^{3}.$$

Б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$ умножим и поделим на сопряженное числителю выражение:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x-1+x)}{2x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}\right)}=\frac{1}{2}.$$

В) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{4x^5+x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3+2/x^2\right)}{x^2\left(4x^3+1/x+1/x^2\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(3+2/x^2\right)}{\left(4x^3+1/x+1/x^2\right)}=\frac{(3+0)}{(\infty+0+0)}=0.$

Задача 2. Найти производные:

$$y=\frac{2x}{1-x^2}\ , \qquad y=x+\sqrt[3]{x}\ , \qquad y=(3x+5)^4$$

Решение.

А) $y=\frac{2x}{1-x^2}$. Используем формулу произведения от частного:

$$y'=\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)'=\frac{2\left(1-x^2\right)-2x(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2}=2\frac{1-x^2+2x^2}{\left(1-x^2\right)^2}=2\frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}.$$

Б) $y=x+\sqrt[3]{x}$. Используем формулу производной от степенной функции.

$$y'=\left(x+\sqrt[3]{x}\right)'=\left(x+x^{1/3}\right)'=1+\frac{1}{3}x^{1/3-1}=1+\frac{1}{3}x^{-2/3}=1+\frac{1}{3x^{2/3}}.$$

В) $y=(3x+5)^4$. Используем формулу для производной от сложной функции.

$$y'=\left((3x+5)^4\right)'=4(3x+5)^3(3x+5)'=4(3x+5)^3 3=12(3x+5)^3.$$

Задача 3. Найти интегралы:

$$\int ax^5 dx, \int \frac{(2\ln x + 3)^3}{x} dx, \int \frac{xdx}{\sin^2 x}$$

Решение.

А) Используем формулу для интегрирования степенной функции

$$\int ax^5 dx = a\int x^5 dx = a\frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{a}{6}x^6 + C.$$

Б) Делаем замену

$$\int \frac{(2\ln x + 3)^3}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \textit{замена} \\ t = 2\ln x + 3, \\ dt = 2\frac{dx}{x},\ \frac{1}{2}dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int t^3 dt = \frac{1}{2}\frac{t^{3+1}}{3+1} + C = \frac{1}{8}t^4 + C = \frac{1}{8}(2\ln x + 3)^4 + C.$$

В) Интегрируем по частям

$$\int \frac{xdx}{\sin^2 x} = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x} & v = -\operatorname{ctg} x \end{vmatrix} = -x \operatorname{ctg} x + \int \operatorname{ctg} x dx = -x \operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C.$$