Решение практической работы № 5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И РЯДЫ

Задача 6.1. Разложить в ряд по степеням *x* (с указанием области сходимости ряда)

$$y = e^x \sin x.$$

Решение. Запишем $y = e^x \sin x$ как

$$y = e^x \sin x = e^x \operatorname{Im}\left(e^{ix}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{(i+1)x}\right) = \operatorname{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((i+1)x\right)^n}{n!} =$$

$$= \operatorname{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i+1)^n}{n!}x^n =$$

Рассмотрим подробнее множитель $(i+1)^n$:

$$(i+1)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{\pi n}{4}} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{\pi n}{4}+i\sin\frac{\pi n}{4}\right).$$

Возвращаемся к ряду:

$$= \operatorname{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{\pi n}{4}+i\sin\frac{\pi n}{4}\right)}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n!}x^n \operatorname{Im}\left(\cos\frac{\pi n}{4}+i\sin\frac{\pi n}{4}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n!}\sin\frac{\pi n}{4}\cdot x^n.$$

Найдем область сходимости ряда. Так как ряд для e^y сходится при любом y, а данную функцию свели к экспоненте, ряд также сходится при любом x.

Задача 6.2. Вычислить приближенное значение выражения $\sqrt[3]{68}$ с помощью разложения функции $f(x)=(1+x)^m$ в степенной ряд с точностью 0.001.

Решение. Представим $A=\sqrt[3]{68}$ в следующем виде:

$$A=\sqrt[3]{68}=\sqrt[3]{64+4}=\sqrt[3]{64(1+1/16)}=4\sqrt[3]{1+1/16}.$$

Используем разложение в ряд Маклорена:

$$f(x)=a\sqrt[3]{1+x}=a\left(1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3-\ldots\right)$$

Получаем:

$$A=4\sqrt[3]{1+1/16}=4\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{16}\right)^2+\frac{5}{81}\left(\frac{1}{16}\right)^3-\ldots\right)=4\left(1+\frac{1}{48}-\frac{1}{2304}+\frac{5}{331776}-\ldots\right)=$$

$$=4+\frac{1}{12}-\frac{1}{576}+\frac{5}{82944}-\ldots\approx 4+0,0833-0,0017+0,00006\approx 4+0,0833-0,0017=4,082.$$

Так как ряд знакочередующийся, погрешность не превосходит (по модулю) первого отброшенного члена: $|\varepsilon|\le 0,0006<0,001$.

Задача 6.3. $y^2+x^2y'=xy\cdot y'$.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$y^2+x^2y'=xyy',$$
$$y'\left(xy-x^2\right)=y^2,$$
$$y'=\frac{y^2}{xy-x^2},$$
$$y'=\frac{(y/x)^2}{y/x-1}.$$

Получили однородное уравнение вида $y'=f(y/x)$, делаем замену $z=y/x,\ y=zx,\ \ y'=z'x+z$. Получаем:

$$z'x+z=\frac{z^2}{z-1},$$
$$\frac{dz}{dx}x=\frac{z^2}{z-1}-z,$$
$$\frac{dz}{dx}x=\frac{z^2-z^2+z}{z-1},$$
$$\frac{dz}{dx}x=\frac{z}{z-1},$$
$$\frac{z-1}{z}dz=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем:

$$\int\frac{z-1}{z}dz=\int\frac{dx}{x},$$
$$\int\left(1-\frac{1}{z}\right)dz=\int\frac{dx}{x},$$
$$z-\ln|z|=\ln|x|+C.$$

Возвращаемся к исходной функции:

$$\frac{y}{x}-\ln|y/x|=\ln|x|+C,$$
$$\frac{y}{x}-\ln|y|+\ln|x|=\ln|x|+C,$$
$$\frac{y}{x}-\ln|y|=C.$$

Задача 6.4. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$.

Решение. Это линейное неоднородное уравнение. Сначала найдем решение соответствующего однородного уравнения:

$$\left(1+x^2\right)y'-2xy=0,$$
$$\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}=2xy,$$
$$\frac{dy}{y}=\frac{2xdx}{1+x^2},$$
$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{2xdx}{1+x^2},$$
$$\ln|y|=\ln|1+x^2|+\ln|C|,$$
$$y=C\left(1+x^2\right).$$

Тогда решение исходного уравнения будем искать в виде $y=C(x)\left(1+x^2\right)$. Вычисляем производную: $y'=C'(x)\left(1+x^2\right)+C(x)2x$ и подставляем в уравнение:

$$\left(1+x^2\right)\left(C'(x)\left(1+x^2\right)+C(x)2x\right)-2xC(x)\left(1+x^2\right)=\left(1+x^2\right)^2,$$
$$\left(1+x^2\right)C'(x)\left(1+x^2\right)+C(x)2x\left(1+x^2\right)-2xC(x)\left(1+x^2\right)=\left(1+x^2\right)^2,$$
$$C'(x)\left(1+x^2\right)^2=\left(1+x^2\right)^2,$$
$$C'(x)=1,$$
$$C(x)=\int 1dx=x+A.$$

Получаем общее решение $y=(x+A)\left(1+x^2\right)$, где A - произвольная постоянная.

Задача 6.5. $\frac{2+2xy}{y}dx-\frac{2x}{y^2}dy=0.$

Решение.

Так как

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2+2xy}{y}\right)=-\frac{2}{y^2},\ \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2x}{y^2}\right)=-\frac{2}{y^2},$$

то это уравнение в полных дифференциалах, то есть существует такая функция $U(x,y)$, что

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\left(\frac{2+2xy}{y}\right),\ \frac{\partial U}{\partial y}=\left(-\frac{2x}{y^2}\right).\ (*)$$

Восстановим эту функцию по известным производным.

$$U(x,y)=\int\frac{\partial U}{\partial x}dx=\int\left(\frac{2+2xy}{y}\right)dx=\int\left(\frac{2}{y}+2x\right)dx=\frac{2x}{y}+x^2+\varphi(y)..$$

Теперь возьмем частную производную по y и приравняем к второму уравнению в (*):

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\left(\frac{2x}{y}+x^2+\varphi(y)\right)'=-\frac{2x}{y^2}+\varphi'(y)=-\frac{2x}{y^2},$$
$$\varphi'(y)=0,$$
$$\varphi(y)=C.$$

Получили, что

$$U(x,y)=\frac{2x}{y}+x^2+C.$$

Тогда общий интеграл уравнения: $\frac{2x}{y}+x^2=C$.

Задача 6.6. $y''=y'+x.$

Решение. Так как в уравнение явно не входит функция y, делаем замену $z=y'$, $z'=y''$. Получим: $z'=z+x$. Решаем получившееся линейное неоднородное уравнение.

$$z' = z,$$
$$\frac{dz}{dx} = z,$$
$$\frac{dz}{z} = dx,$$
$$\int \frac{dz}{z} = \int dx,$$
$$\ln|z| = x + \ln|C|,$$
$$z = Ce^x.$$

Ищем решение в виде $z = C(x)e^x$. Производная: $z' = C'(x)e^x + C(x)e^x$. Подставляем:

$$C'(x)e^x + C(x)e^x = C(x)e^x + x,$$
$$C'(x)e^x = x,$$
$$C'(x) = xe^{-x},$$
$$C(x) = \int xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1.$$

Получаем решение: $z = e^x\left(-xe^{-x} - e^{-x} + C_1\right) = -x - 1 + C_1e^x.$

Возвращаемся к исходной функции:

$$y' = -x - 1 + C_1e^x,$$
$$y = \int\left(-x - 1 + C_1e^x\right)dx = -\frac{1}{2}x^2 - x + C_1e^x + C_2.$$

Искомое решение: $y(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + C_1e^x + C_2$

Задача 6.7. $yy'' = y'^2 + y^2 y'$.

Решение. Так как в уравнение явно не входит аргумент x, вводим параметризацию $p(y) = y'$, тогда $y'' = p'p$. Получаем:

$$yp'p = p^2 + y^2 p,$$
$$yp' = p + y^2,$$
$$yp' - p = y^2.$$

Получили линейное неоднородное уравнение. Сначала находим общее решение однородного:

$$yp' - p = 0,$$
$$y\frac{dp}{dy} = p,$$
$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y},$$
$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y},$$
$$\ln|p| = \ln|y| + \ln|C|,$$
$$p = Cy.$$

Теперь положим $p = C(y)y$, тогда $p' = C'(y)y + C(y)$. Подставляем в уравнение:

$$y\left(C'(y)y + C(y)\right) - C(y)y = y^2,$$
$$C'(y)y^2 = y^2,$$
$$C'(y) = 1,$$
$$C(y) = y + C_1.$$

Получаем решение неоднородного уравнения $p(y) = C(y)y = y^2 + C_1 y.$

Приходим к новому уравнению:

$$y' = y^2 + C_1 y,$$
$$\frac{dy}{dx} = y^2 + C_1 y,$$
$$\frac{dy}{y^2 + C_1 y} = dx,$$
$$\int \frac{dy}{y^2 + C_1 y} = \int dx,$$

Интеграл:

$$\int \frac{dy}{y^2 + C_1 y} = \frac{1}{C_1} \int \frac{C_1 dy}{y(y + C_1)} = \frac{1}{C_1} \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{(y + C_1)} \right) dy =$$
$$= \frac{1}{C_1} (\ln|y| - \ln|y + C_1|) + C_2 = \frac{1}{C_1} \ln\left| \frac{y}{y + C_1} \right| + C_2.$$

Получаем после интегрирования:

$$\frac{1}{C_1} \ln\left| \frac{y}{y + C_1} \right| + C_2 = x,$$
$$\frac{1}{C_1} \ln\left| \frac{y}{y + C_1} \right| + C_2 - x = 0.$$

Общий интеграл: $\frac{1}{C_1} \ln\left| \frac{y}{y + C_1} \right| + C_2 - x = 0$.

Задача 6.8. $y'' + 5y' + 6y = 0; y(0) = 1, y'(0) = -6.$

Решение. Это линейное однородное уравнение третьего порядка. Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$y''+5y'+6y=0,$$
$$k^2+5k+6=0,$$
$$k^2+5k+6=0,$$
$$(k+2)(k+3)=0,$$
$$k_1=-2,\ k_2=-3.$$

Общее решение: $y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$.

Найдем C_1, C_2 из условий $y(0)=1,\ y'(0)=-6$:

$$\begin{cases} y(0)=C_1+C_2=1, \\ y'(0)=-2C_1-3C_2=-6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1=-3, \\ C_2=4. \end{cases}$$

Искомое решение: $y(x)=-3e^{-2x}+4e^{-3x}$

Задача 6.9. $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}.$

Решение. Это линейное неоднородное уравнение второго порядка. Сначала решаем соответствующее однородное уравнение $y''-4y'+4y=0$. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2-4k+4=0,$$
$$(k-2)^2=0,$$
$$k_{1,2}=2.$$

Получаем $y_{\text{о.о.}}=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$

Найдем частное решение неоднородного уравнения по виду правой части.

$f=e^{-x}$. Частное решение ищем в виде $y_{\text{ч.н.}}=Ae^{-x}$. Находим производные: $y_{\text{ч.н.}}'=-Ae^{-x}$, $y_{\text{ч.н.}}''=Ae^{-x}$. Подставляем:

$$Ae^{-x}+4\cdot Ae^{-x}+4\cdot Ae^{-x}=e^{-x},$$
$$9Ae^{-x}=e^{-x},$$
$$A=\frac{1}{9}.$$

То есть: $y_{\text{ч.н.}}=\frac{1}{9}e^{-x}$.

Тогда общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_{\text{о.н.}}=y_{\text{о.о.}}+y_{\text{ч.н.}}=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+\frac{1}{9}e^{-x}.$$

Задача 6.10. В сосуд, содержащий 1 кг воды при температуре $20°$, опущен алюминиевый предмет с массой 0,5 кг, удельной теплоемкостью 0,2 и температурой $75°$. Через минуту вода нагрелась на $2°$. Когда температура воды и предмета будет отличаться одна от другой на $1°$? Потерями тепла нагревания сосуда пренебречь.

Решение. Примем теплоемкость воды за 1

Для предмета и воды можем записать дифференциальные уравнения

$\frac{dT_{Ï}}{dt} = k_{Ï}(T_{Ï} - T_{Â}); \frac{dT_{Â}}{dt} = k_{Â}(T_{Â} - T_{Ï})$, где $T_{Ï}, T_{Â}$ - температура воды и предмета соответственно, $k_{Ï}, k_{Â}$ - постоянные коэффициенты.

Вычитая почленно из первого соотношения второе и вводя обозначения $R = T_{Ï} - T_{Â}$ можем записать

$$\frac{dR}{dt} = kR, k = k_{Ï} + k_{Â}$$

Значит, $R = Ce^{kt}$.

Поскольку в начальный момент времени $t = 0$ разность равна $R = 75° - 20° = 55°$, значит $C = 55$. Поэтому $R = 55e^{kt}$.

Для определения коэффициента k воспользуемся уравнением теплового баланса. По общей формуле для теплоты $Q = cm\left(T_K - T_Ï\right)$, где $ñ-$ удельная теплоемкость тела, $m-$ его масса, $T_K - T_Ï$ - разность температур:

$$Q_1 = 2 \cdot c_{Â} \cdot 1° = 2; Q_1 = 0.2 \cdot 0.5\left(75 - T\right)c_{Â} = 0,1\left(75 - T\right)$$

Здесь Q_1 - количество тепла, поглощенного водой, Q_2 – количество тепла, выделенное предметом при остывании. По условию $Q_1 = Q_2$, то $T = 55°$. Таким образом, через минуту $R = 55° - 22° = 33°$. А тогда $33° = 55° e^k \Rightarrow k = \ln 0.6$

Поэтому $R = 55 \cdot 0.6^t$ есть закон сближения температур воды и тела. Из равенства $1 = 55 \cdot 0.6 t_1$ находим $t_1 = \dfrac{\ln 55}{\ln 5 - \ln 3} \approx 8$ì èí - время, по истечении которого температура тела будет выше температуры воды на $1°$.