Расчетно-графическая работа №4
Интегралы

Задания 1-8. Найти неопределенные интегралы:
Сделать проверку дифференцированием в трех из шести задач.

1) $\int \frac{\arccos^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Решение.

Применяем метод подстановки: $t = \arccos x,\ dt = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int \frac{\arccos^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int (t^3 - 1)\, dt = -\frac{1}{4}t^4 + t + C = -\frac{1}{4}\arccos^4 x + \arccos x + C$$

Делаем проверку. Получаем, что $f(x) = \frac{\arccos^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}}$, $F(x) = -\frac{1}{4}\arccos^4 x + \arccos x + C$.

$$F'(x) = \left(-\frac{1}{4}\arccos^4 x + \arccos x + C\right)' = -\frac{1}{4}4\arccos^3 x\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + 0 =$$

$$= \frac{\arccos^3 x - 1}{\sqrt{1-x^2}} = f(x).$$

Верно.

2) $\int (4x+3)\sin 5x dx$

Решение. Интегрируем по частям:

$$\int (4x+3)\sin 5x dx = \left| \begin{matrix} u = 4x+3 & du = 4dx \\ dv = \sin 5x dx & v = -\frac{1}{5}\cos 5x \end{matrix} \right| = -\frac{1}{5}\cos 5x(4x+3) + \frac{4}{5}\int \cos 5x dx =$$

$$= -\frac{1}{5}\cos 5x(4x+3) + \frac{4}{25}\sin 5x + C.$$

Делаем проверку. Получаем, что $f(x) = (4x+3)\sin 5x$,

$$F(x) = -\frac{1}{5}\cos 5x(4x+3) + \frac{4}{25}\sin 5x + C.$$

$$F'(x) = \left(-\frac{1}{5}\cos 5x(4x+3) + \frac{4}{25}\sin 5x + C\right)' =$$

$$= -\frac{1}{5}(-1)5\sin 5x(4x+3) - \frac{4}{5}\cos 5x + \frac{4}{5}\cos 5x + 0 =$$

$$= \sin 5x(4x+3) = f(x).$$

Верно.

3) $\int \frac{2-5x^2}{x(x-1)(x+2)}dx$

Решение. Разложим дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{2-5x^2}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x},$$

$$2-5x^2=Ax(x+2)+Bx(x-1)+C(x-1)(x+2).$$

Положим $x=0$, тогда $2=-2C,\ C=-1$.

Положим $x=1$, тогда $2-5=3A,\ A=-1$.

Положим $x=-2$, тогда $2-20=6B,\ B=-3$

Получили $\frac{2-5x^2}{x(x-1)(x+2)}=-\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x+2}-\frac{1}{x},$

Переходим к интегралу:

$$\int \frac{2-5x^2}{x(x-1)(x+2)}dx=-\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{3}{x+2}dx-\int\frac{1}{x}dx=$$

$$=-\ln|x-1|-3\ln|x+2|-\ln|x|+C.$$

Делаем проверку. Получаем, что $f(x)=\frac{2-5x^2}{x(x-1)(x+2)}$,

$$F(x)=-\ln|x-1|-3\ln|x+2|-\ln|x|+C.$$

$$F'(x)=\left(-\ln|x-1|-3\ln|x+2|-\ln|x|+C\right)'=$$

$$=-\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x+2}-\frac{1}{x}=\frac{-x(x+2)-3x(x-1)-(x-1)(x+2)}{x(x-1)(x+2)}=$$

$$=\frac{-x^2-2x-3x^2+3x-x^2-x+2}{x(x-1)(x+2)}=\frac{2-5x^2}{x(x-1)(x+2)}=f(x).$$

Верно.

4) $\int \cos^4 3x dx$

Решение. Используем для преобразования тригонометрические формулы:

$$\int\cos^4 3xdx=\int\left(\cos^2 3x\right)^2dx=\frac{1}{4}\int(1+\cos 6x)^2dx=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 6x+\cos^2 6x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 6x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 12x\right)dx=\frac{1}{4}\int\left(2\cos 6x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 12x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin 6x+\frac{3}{2}x+\frac{1}{24}\sin 12x\right)+C=\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{3}{8}x+\frac{1}{96}\sin 12x+C.$$

5) $\int\frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx$

Решение.

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\sin x dx = -\int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2}{\cos^4 x} d\left(\cos x\right) = \left| \begin{matrix} \text{замена} \\ t = \cos x \end{matrix} \right| =$$

$$= -\int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{t^4}dt = -\int \frac{1-2t^2+t^4}{t^4}dt = -\int \left(\frac{1}{t^4} - 2\frac{1}{t^2} + 1\right)dt = \frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} - t + C =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C.$$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{4x-1}+2}$

Решение. Делаем подстановку, чтобы избавиться от иррациональности:
$t = \sqrt[4]{4x-1}, 4x-1 = t^4, 4dx = 4t^3 dt,\ dx = t^3 dt$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{4x-1}+2} = \int \frac{t^3 dt}{t+2} = \int \frac{t^2\left(t+2\right)-2t^2}{t+2}dt = \int \left(t^2 - 2\frac{t^2}{t+2}\right)dt = \int \left(t^2 - 2\frac{t\left(t+2\right)-2t}{t+2}\right)dt =$$

$$= \int \left(t^2 - 2t + 4\frac{t}{t+2}\right)dt = \int \left(t^2 - 2t + 4\frac{t+2-2}{t+2}\right)dt =$$

$$= \int \left(t^2 - 2t + 4 - \frac{8}{t+2}\right)dt = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 4t - 8\ln|t+2| + C =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt[4]{4x-1}\right)^3 - \left(\sqrt[4]{4x-1}\right)^2 + 4\sqrt[4]{4x-1} - 8\ln|\sqrt[4]{4x-1}+2| + C.$$

7) $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^2}$

Решение. Разложим дробь на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{x^3\left(x-1\right)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{(x-1)^2},$$

$$1 = Ax^2(x-1)^2 + Bx(x-1)^2 + C(x-1)^2 + Dx^3(x-1) + Ex^3,$$

$$1 = A(x^4 - 2x^3 + x^2) + B(x^3 - 2x^2 + x) + C(x^2 - 2x + 1) + D(x^4 - x^3) + Ex^3.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x справа и слева и получаем систему:

$$\begin{cases} A+D=0, \\ -2A+B-D+E=0, \\ A-2B+C=0, \\ B-2C=0, \\ C=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} D=-3, \\ E=1, \\ A=3, \\ B=2, \\ C=1; \end{cases}$$

То есть

$$\frac{1}{x^3\left(x-1\right)^2}=\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

Возвращаемся к интегралу:

$$\int\frac{dx}{x^3\left(x-1\right)^2}=\int\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx=$$

$$=3\ln|x|-\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}-3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$$

8) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Решение.

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{x\cdot xdx}{\sqrt{4-x^2}}=\left|\begin{array}{cc} u=x & du=dx \\ dv=\dfrac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} & v=-\sqrt{4-x^2} \end{array}\right|=-x\sqrt{4-x^2}+\int\sqrt{4-x^2}dx=$$

Вычислим теперь:

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = I = \left| \begin{matrix} u=\sqrt{4-x^2} & du=-\dfrac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} \\ dv=dx & v=x \end{matrix} \right| = x\sqrt{4-x^2}+\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{4-x^2}-\int \frac{-x^2+4-4}{\sqrt{4-x^2}}dx = x\sqrt{4-x^2}-\int \frac{-x^2+4}{\sqrt{4-x^2}}dx-\int \frac{-4}{\sqrt{4-x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{4-x^2}-\int \sqrt{4-x^2}dx+4\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = x\sqrt{4-x^2}-I+4\arcsin\frac{x}{2}+C,$$

$$2I = x\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\frac{x}{2}+C,$$

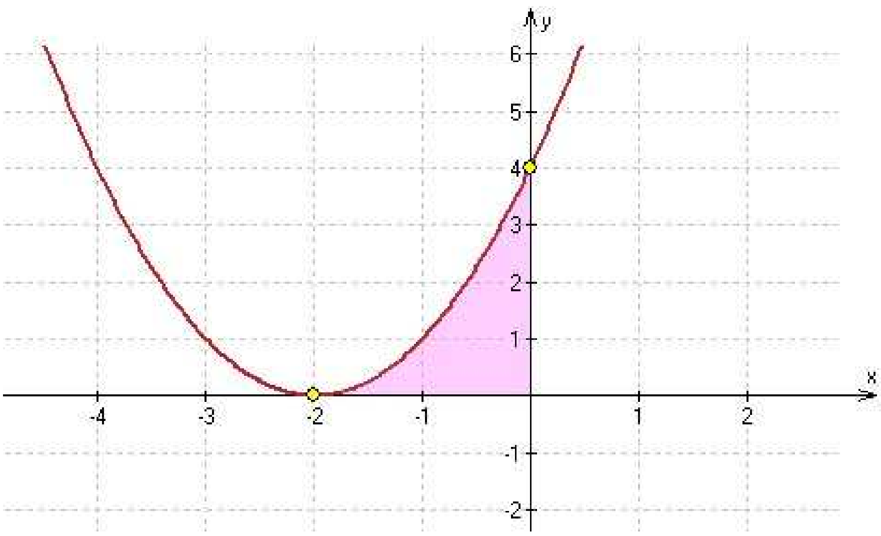
$$I=\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C.$$

Получаем:

$$= -x\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C = -\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C.$$

Задание 9. На координатной плоскости XOY построить область, ограниченную линиями $y=(x+2)^2$, $y=0,\ x=0$ и найти ее площадь.

Решение. Делаем чертеж:

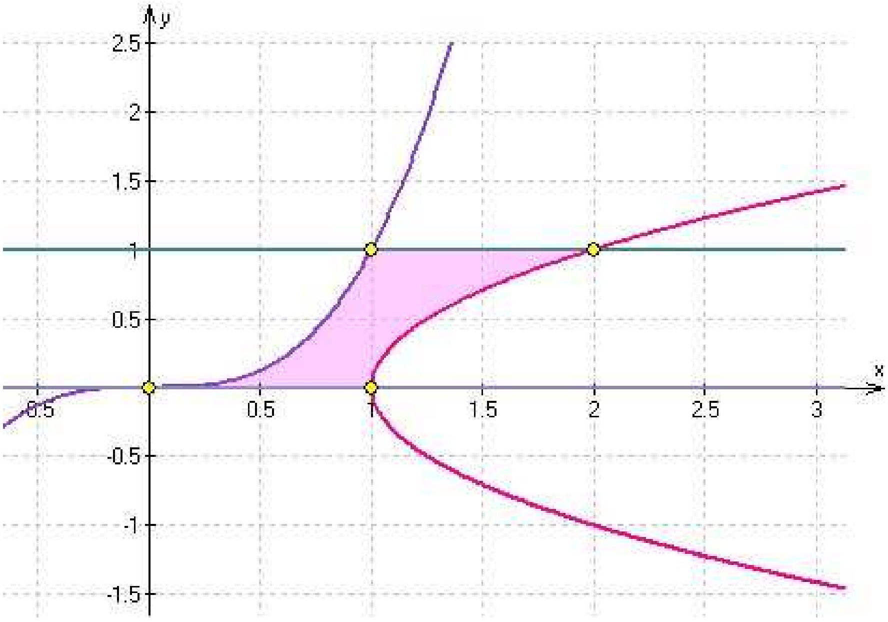


Площадь области:

$$S=\int_{-2}^{0}(x+2)^2\,dx = \frac{1}{3}(x+2)^3\Big|_{-2}^{0} = \frac{1}{3}\left(2^3-0^3\right)=\frac{8}{3}.$$

Задание 10. На координатной плоскости XOY построить площадь, ограниченную линиями $y^2 = x-1$, $y = x^3$, $y = 0$, $y = 1$, и найти объем тела, образованного вращением этой площади вокруг оси OY.

Решение. Сделаем чертеж площади:



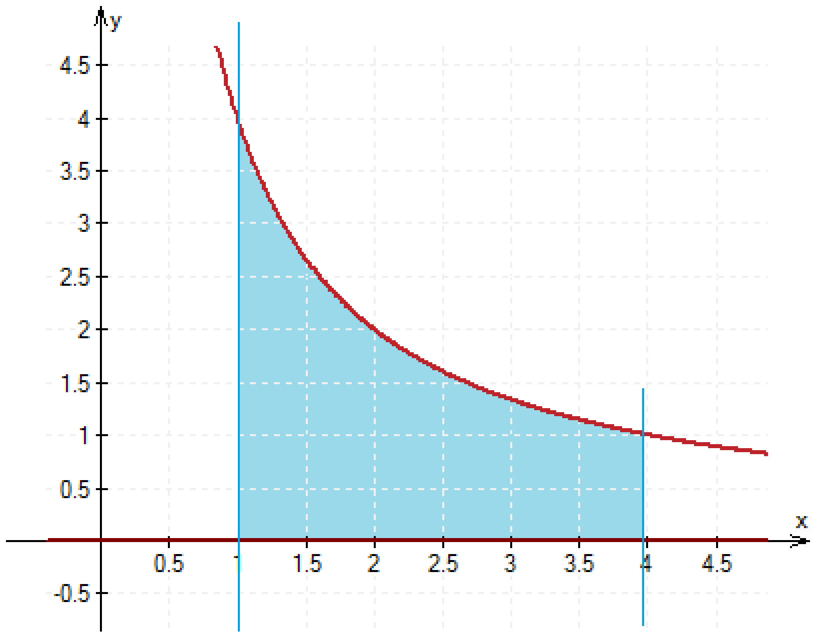
Тогда объем тела равен

$$V_{OY} = \pi\int_a^b \left(x_1^2 - x_2^2\right) dx = \pi\int_0^1 \left(\left(y^2+1\right)^2 - \left(y^{1/3}\right)^2\right) dx = \pi\int_0^1 \left(y^4 + 2y^2 + 1 - y^{2/3}\right) dx =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{5}y^5 + \frac{2}{3}y^3 + y - \frac{3}{5}y^{5/3}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1-\frac{3}{5}\right) = \frac{19}{15}\pi.$$

Задача 11. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями: $xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0$.

Решение. Сделаем схематический чертеж сечения фигуры.



Тогда объем тела вращения равен:

$$V_x = \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = 16\pi \int_1^4 \frac{dx}{x^2} = -16\pi \left(\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^4 = -16\pi\left(\frac{1}{4} - 1\right) = 12\pi.$$

Ответ: 12π.

Задача 12. Вычислить приближённое значение определённого интеграла с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

$$\int_{-3}^{7} \sqrt{x^3 + 32}\, dx$$

Решение.

Используем формулу $I \approx I_S = \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i) + 4f(x_{i-1/2}) + f(x_{i-1})\right)$. Здесь $h = \frac{b-a}{n} = \frac{7+3}{10} = 1$.

Вычисляем значения функции $f(x) = \sqrt{x^3 + 32}$ в нужных точках:

i	x_i	$f(x_i)$	$f(x_i)+4f(x_{i-1/2})+f(x_{i-1})$
0	-3	2,236068	
0,5	-2,5	4,046604	23,32146
1	-2	4,898979	
1,5	-1,5	5,350234	31,86768
2	-1	5,567764	
2,5	-0,5	5,645795	33,8078

3	0	5,656854	
3,5	0,5	5,667892	34,07298
4	1	5,744563	
4,5	1,5	5,947689	35,85987
5	2	6,324555	
5,5	2,5	6,901087	41,61005
6	3	7,681146	
6,5	3,5	8,653034	52,09124
7	4	9,797959	
7,5	4,5	11,09617	66,71261
8	5	12,52996	
8,5	5,5	14,08457	84,61624
9	6	15,74802	
9,5	6,5	17,51071	105,1558
10	7	19,36492	

Значение **84,85262**

Получаем приближенное значение: $I \approx I_S \approx 84,853$.