Типовой расчет
Интегралы

Задание 1. Вычислить неопределенный интеграл каждой из следующих функций

1) $\int (8x^3+6x^2-2x+1)dx$

2) $\int x^2\cos x^3 dx$

3) $\int (2x-1)\cos 2x dx$

4) $\int \frac{5x+3}{x^2-4x-5}dx$

5) $\int \frac{3x-7}{(x+1)^2(x-2)}dx$

Решение:

1) $\int (8x^3+6x^2-2x+1)dx = 2x^4+2x^3-x^2+x+C$

2) $\int x^2\cos x^3 dx = \frac{1}{3}\int \cos x^3 dx^3 = \frac{\sin x^3}{3}+C$

3)

$$\int (2x-1)\cos 2x dx = \left| \begin{matrix} u=2x-1 & du=2dx \\ dv=\cos 2x dx & v=\frac{\sin 2x}{2} \end{matrix} \right| = (2x-1)\frac{\sin 2x}{2} - 2\int \frac{\sin 2x}{2}dx =$$

$$= (2x-1)\frac{\sin 2x}{2} - \int \sin 2x dx = (2x-1)\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + C$$

4)

$$\int \frac{5x+3}{x^2-4x-5}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+\frac{6}{5}}{x^2-4x-5}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x-4+\frac{26}{5}}{x^2-4x-5}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x-5}dx + 13\int \frac{dx}{x^2-4x-5} =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{d(x^2-4x-5)}{x^2-4x-5} + 13\int \frac{dx}{(x+1)(x-5)} = \frac{5}{2}\ln(x^2-4x-5) + \frac{13}{6}\int \left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{5}{2}\ln(x^2-4x-5) + \frac{13}{6}\ln\frac{x-5}{x+1} + C$$

5)

$$\int \frac{3x-7}{(x+1)^2(x-2)}dx$$

Разложим подынтегральное выражение на слагаемые

$$\frac{3x-7}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{Ax+B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-2}=\frac{(Ax+B)(x-2)+C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)}$$

$$(Ax+B)(x-2)+C(x+1)^2=3x-7$$

$$Ax^2-2Ax+Bx-2B+Cx^2+2Cx+C=3x-7$$

$$\begin{cases}A+C=0\\-2A+B+2C=3\\-2B+C=-7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{1}{9}\\B=\dfrac{25}{9}\\C=-\dfrac{1}{9}\end{cases}$$

$$\frac{3x-7}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{1}{9}\frac{x+25}{(x+1)^2}-\frac{1}{9}\frac{1}{x-2}$$

$$\int\frac{3x-7}{(x+1)^2(x-2)}=\int\left(\frac{1}{9}\frac{x+25}{(x+1)^2}-\frac{1}{9}\frac{1}{x-2}\right)dx=\frac{1}{9}\int\frac{x+1+24}{(x+1)^2}dx-\frac{1}{9}\ln(x-2)=$$

$$=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{8}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{1}{9}\ln(x-2)=\frac{1}{9}\ln(x+1)-\frac{8}{3}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{9}\ln(x-2)+C$$

Задание 2. Вычислить определенные интегралы

1) $\int\limits_{-2}^{2}(x^2-4x+1)dx$

2) $\int\limits_{4\pi/5}^{\pi}\frac{1}{\cos^2\frac{5x}{4}}dx$

3) $\frac{16}{4\ln 4-3}\int\limits_{1/4}^{1}\ln 4x dx$

Решение.

1) $\int\limits_{-2}^{2}(x^2-4x+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+x\right]_{-2}^{2}=\left[\frac{2^3}{3}-2*2^2+2\right]-\left[-\frac{2^3}{3}-2*2^2-2\right]=\frac{28}{3}$

2) $\int\limits_{4\pi/5}^{\pi}\frac{1}{\cos^2\frac{5x}{4}}dx=\frac{4}{5}\int\limits_{4\pi/5}^{\pi}\frac{1}{\cos^2\frac{5x}{4}}d\left(\frac{5x}{4}\right)=\left[\frac{4}{5}tg\left(\frac{5x}{4}\right)\right]_{4\pi/5}^{\pi}=\frac{4}{5}\left(tg\frac{5\pi}{4}-tg\pi\right)=\infty$

3)

$$\frac{16}{4\ln 4-3}\int_{1/4}^{1}\ln 4x dx$$

$$\int \ln 4x dx = \left| \begin{matrix} u=\ln 4x & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx & v=x \end{matrix} \right| = x\ln 4x - \int dx = x\ln 4x - x$$

$$\frac{16}{4\ln 4-3}\int_{1/4}^{1}\ln 4x dx = \frac{16}{4\ln 4-3}\left[x\ln 4x - x\right]_{1/4}^{1} = \frac{16}{4\ln 4-3}\left[\ln 4 - 1 - \frac{1}{4}\ln 1 + \frac{1}{4}\right] =$$

$$= \frac{16}{4\ln 4-3}\left[\ln 4 - \frac{3}{4}\right] = 4$$

Задание 3.

Найти площадь, ограниченную графиками функции $y = x^2 - 6x + 8, y = 10 - 5x$

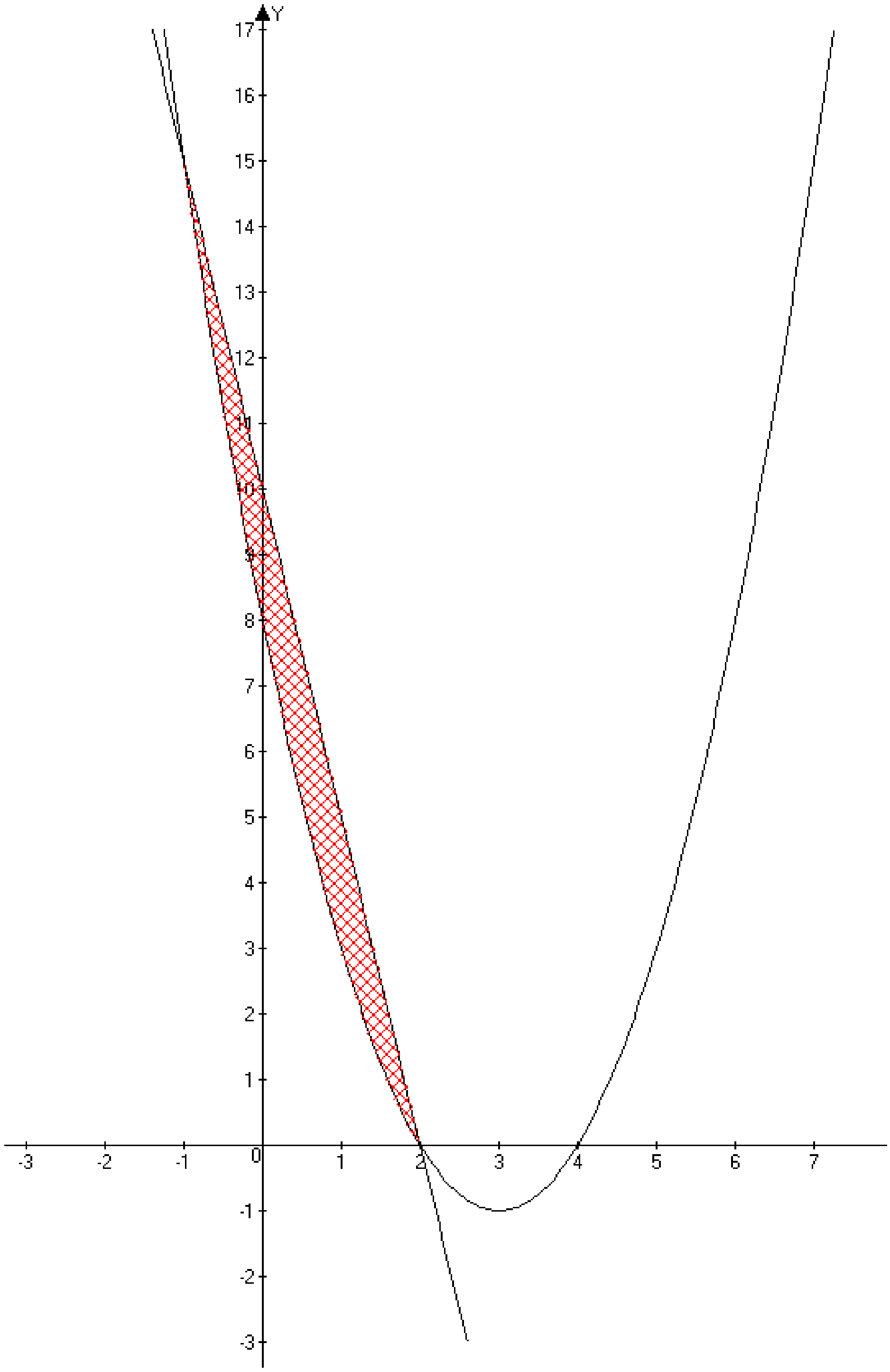
Решение. Найдем точки пересечения кривых:

$x^2 - 6x + 8 = 10 - 5x$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x = -1; x = 2$

Сделаем схематический чертеж.



Тогда площадь фигуры:

$$S=\int_{-1}^{2}\left(10-5x-x^2+6x-8\right)dx=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

Задание 4. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$$

Решение. Сначала найдем неопределенный интеграл:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C.$$

Тогда

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| \right)\Bigg|_0^{\pi/2-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\left|\frac{1+\sin(\pi/2-\varepsilon)}{\cos(\pi/2-\varepsilon)}\right| - \ln\left|\frac{1+\sin 0}{\cos 0}\right| \right) = \left(\ln\left|\frac{2}{0}\right| - \ln 1 \right) = (\ln\infty) = \infty.$$

Ответ: Интеграл расходится.