

Контрольная работа выполнена на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_appear.php?p=dm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Решенная контрольная работа по математической логике

Факультет ИСиКТ

Задача 1. Составить таблицу истинности.

$$(x \wedge (y \rightarrow x)) \vee \bar{x}$$

Решение. Составляем таблицу:

x	y	$y \rightarrow x$	$x \wedge (y \rightarrow x)$	\bar{x}	$(x \wedge (y \rightarrow x)) \vee \bar{x}$
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	1

Функция тождественно истинна.

Задача 2. Доказать тождественность истинности формул:

$$\varphi_1 = (R \rightarrow Q) \rightarrow ((R \wedge \bar{Q}) \rightarrow \bar{P}),$$

$$\varphi_2 = (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow P \vee R).$$

Решение. Составим таблицы истинности для этих формул.

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_appear.php?p=dm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$1) \varphi_1 = (R \rightarrow Q) \rightarrow ((R \wedge \bar{Q}) \rightarrow \bar{P})$$

P	Q	R	$R \rightarrow Q$	\bar{Q}	$R \wedge \bar{Q}$	\bar{P}	$(R \wedge \bar{Q}) \rightarrow \bar{P}$	φ_1
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	1	1

$$2) \varphi_2 = (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow P \vee R)$$

P	Q	R	$Q \rightarrow R$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$P \vee Q \rightarrow P \vee R$	φ_2
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_appear.php?p=dm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Формулы тождественно истинны.

Задача 4. Привести к КНФ и СКНФ.

$$\left(\left(\left(A \rightarrow B\right) \rightarrow \bar{A}\right) \rightarrow \bar{B}\right) \rightarrow \bar{C}$$

Решение. Сначала упростим данное выражение, используя законы де Моргана и правило $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$. Получаем:

$$\begin{aligned} F &= \left(\left(\left(A \rightarrow B\right) \rightarrow \bar{A}\right) \rightarrow \bar{B}\right) \rightarrow \bar{C} = \left(\left(\left(\bar{A} \vee B\right) \rightarrow \bar{A}\right) \rightarrow \bar{B}\right) \rightarrow \bar{C} = \left(\left(\left(\overline{\bar{A} \vee B}\right) \vee \bar{A}\right) \rightarrow \bar{B}\right) \rightarrow \bar{C} = \\ &= \left(\left(\overline{\left(\bar{A} \vee B\right) \vee \bar{A}}\right) \vee \bar{B}\right) \rightarrow \bar{C} = \left(\overline{\left(\overline{\left(\bar{A} \vee B\right) \vee \bar{A}}\right) \vee \bar{B}}\right) \vee \bar{C} = \\ &= \left(\overline{\left(\overline{\bar{A} \vee B} \vee \bar{A}\right)} \wedge B\right) \vee \bar{C} = \left(\left(\left(A \wedge \bar{B}\right) \vee \bar{A}\right) \wedge B\right) \vee \bar{C} = \left(\left(A\bar{B} \vee \bar{A}\right) \wedge B\right) \vee \bar{C} = \left(A\bar{B}B \vee \bar{A}B\right) \vee \bar{C} = \\ &= \left(0 \vee \bar{A}B\right) \vee \bar{C} = \bar{A}B \vee \bar{C}. \end{aligned}$$

Теперь приведем выражение к КНФ: $F = \bar{A}B \vee \bar{C} = (\bar{A} \vee \bar{C}) \wedge (B \vee \bar{C})$.

Приведем к СКНФ:

$$\begin{aligned} F &= (\bar{A} \vee \bar{C}) \wedge (B \vee \bar{C}) = (\bar{A} \vee \bar{C} \vee B\bar{B}) \wedge (A\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) = \\ &= (\bar{A} \vee \bar{C} \vee B) \wedge (A \vee B \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee \bar{C} \vee \bar{B}) \wedge (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}). \end{aligned}$$

Задача 5. Задана булева функция:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 \vee \left((x_1 \wedge \bar{x}_3) \mid \overline{(x_2 \mid x_3)} \right)$$

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_appear.php?p=dm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

А) Построить таблицу истинности, найти двоичную форму F булевой функции и привести ее к СДНФ и СКНФ.

Б) Найти многочлен Жегалкина.

Решение. Сначала построим таблицу истинности: $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2} \vee \left((x_1 \wedge \overline{x_3}) \mid (\overline{x_2} \mid \overline{x_3}) \right)$.

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$	$x_1 \wedge \overline{x_3}$	$x_2 \mid \overline{x_3}$	$\overline{(x_2 \mid \overline{x_3})}$	$(x_1 \wedge \overline{x_3}) \mid (\overline{x_2} \mid \overline{x_3})$	f
0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	1	1

Двоичная форма функции: $F = (11111101)$.

Построим СДНФ по таблице истинности:

$$\text{СДНФ} = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3}.$$

Построим СКНФ по таблице истинности:

$$\text{СКНФ} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3.$$

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_appear.php?p=dm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

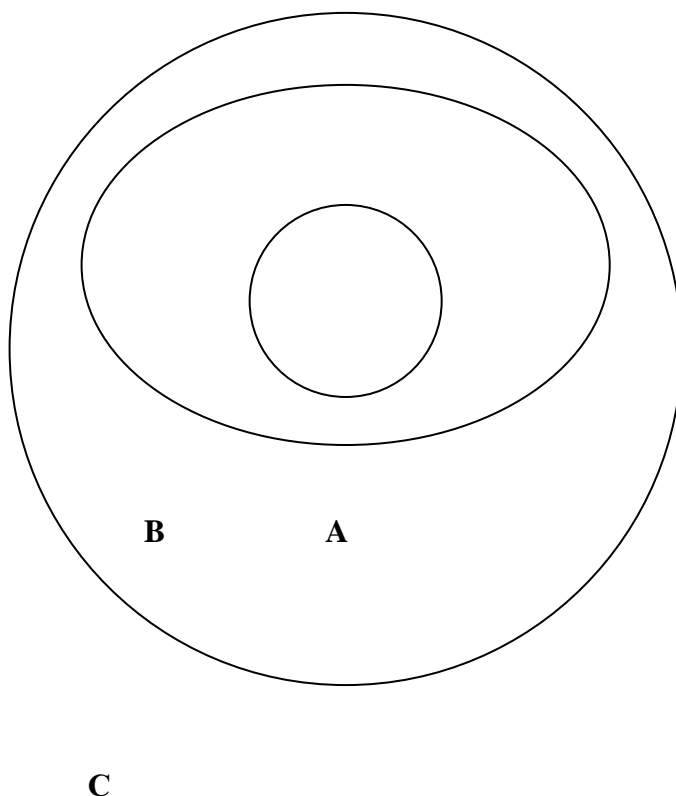
Найдем многочлен Жегалкина. Для этого используем СКНФ, найденную ранее, и формулы $x \vee y = xy \oplus x \oplus y$ и $\bar{x} = x \oplus 1$. Получаем:

$$\begin{aligned} F &= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 = (x_1 \oplus 1) \vee (x_2 \oplus 1) \vee x_3 = [(x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) \oplus (x_1 \oplus 1) \oplus (x_2 \oplus 1)] \vee x_3 = \\ &= [x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 \oplus x_1 \oplus 1 \oplus x_2 \oplus 1] \vee x_3 = [x_1 x_2 \oplus 1] \vee x_3 = (x_1 x_2 \oplus 1) x_3 \oplus (x_1 x_2 \oplus 1) \oplus x_3 = \\ &= x_1 x_2 x_3 \oplus x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus 1 \oplus x_3 = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus 1. \end{aligned}$$

Задача 6. Изобразить с помощью диаграмм Эйлера-Венна множества

$$A \subset B, B \subset C, A \cap B \neq \emptyset.$$

Решение.



Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_appear.php?p=dm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Задача 7. Является ли функция $f : [0;1] \rightarrow [0;3]$ инъективной, сюръективной, биективной и почему?

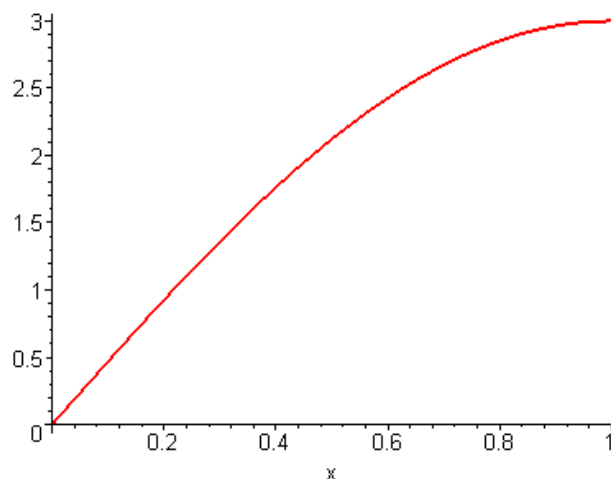
$$x \rightarrow 3 \sin \frac{\pi x}{2}$$

Решение. Используем определения.

Отображение $\varphi : A \rightarrow B$ называется инъективным, если каждый элемент из области его значений имеет единственный прообраз, то есть из $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ следует $x_1 = x_2$.

Отображение $\varphi : A \rightarrow B$ называется сюръективным, если его область значений совпадает со всем множеством B . Отображение $\varphi : A \rightarrow B$ называется биективным, если оно одновременно инъективно и сюръективно.

Сделаем также схематический чертеж:



Так как на интервале $[0;1]$ функция не повторяет периоды, более того, монотонно возрастает, то очевидно, что она является инъективной, для каждого y существует единственный x , такой что $y = 3 \sin \frac{\pi x}{2}$.

Из чертежа и монотонного возрастания функции также можно сделать вывод, что область значений совпадает со всем отрезком $B = [0;3]$, то есть функция сюръективна.

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_appear.php?p=dm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Следовательно, функция биективна.

Задача 10. Упростить следующую формулу:

$$(\overline{x \vee y} \rightarrow x \vee y) \wedge y.$$

Решение. Упрощаем:

$$\begin{aligned}(\overline{x \vee y} \rightarrow x \vee y) \wedge y &= ((\overline{x \wedge y}) \rightarrow (x \vee y)) \wedge y = ((\overline{x \wedge y}) \vee (x \vee y)) \wedge y = \\ &= ((x \vee y) \vee (x \vee y)) \wedge y = (x \vee y) \wedge y = (x \wedge y) \vee (y \wedge y) = xy \vee y.\end{aligned}$$

Задача 11. Найти значение булевой функции при $x = 1, y = 0, z = 0, u = 1$:

$$(x \downarrow y) | (y \downarrow u).$$

Решение.

Подставляем:

$$(x \downarrow y) | (y \downarrow u)_{x=1, y=0, z=0, u=1} = (1 \downarrow 0) | (0 \downarrow 1) = 0 | 0 = 1.$$

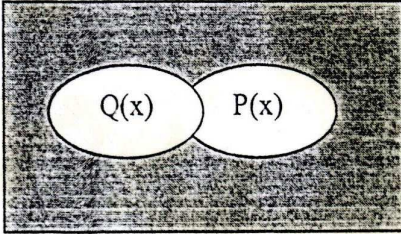
Задача 12. Записать предикаты, полученные в результате логической операции над предикатами $P(x), Q(x), R(x)$ области истинности которых обозначены на следующем рисунке.

Контрольная работа выполнена на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_appear.php?p=dm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию



Решение. Если считать, что эллипсы на чертеже соответствуют областям истинности предикатов $Q(x)$ и $P(x)$ соответственно, то белая область на чертеже соответствует области истинности предиката $Q(x) \vee P(x)$.

Задача 13. Изобразите на координатной плоскости области истинности предикатов:

$$\overline{(x > 2)} \wedge (y \geq 1) \wedge ((x < -1) \vee (y < -2)).$$

Решение. Будем действовать пошагово. Область истинности предиката будем закрашивать.

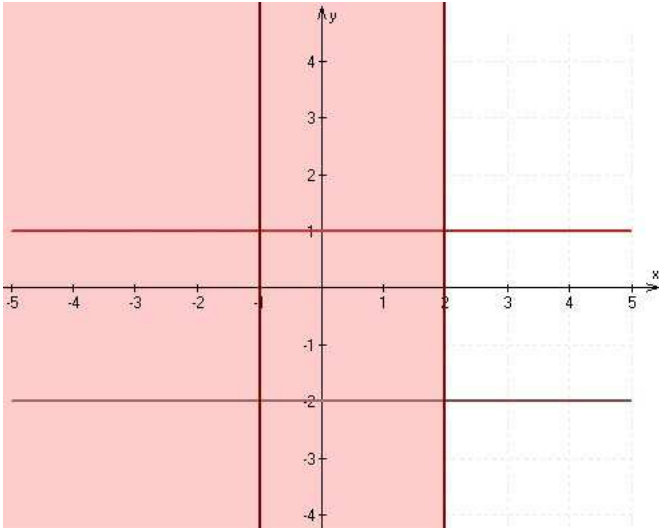
Шаг 1. $\overline{(x > 2)} = (x \leq 2)$

Контрольная работа выполнена на сайте www.matburo.ru

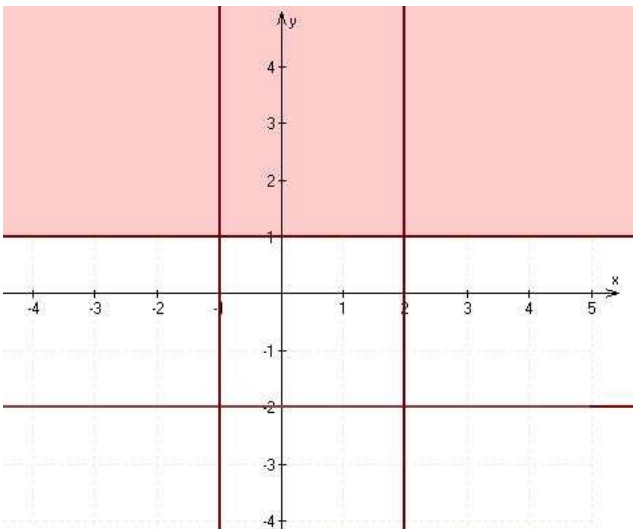
Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_appear.php?p=dm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию



Шаг 2. ($y \geq 1$)



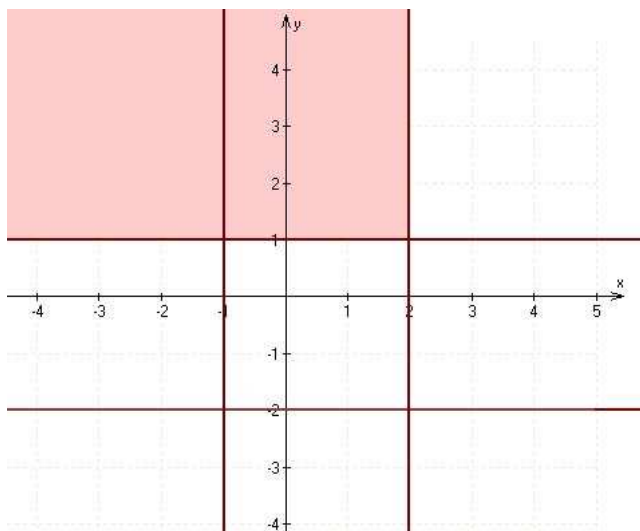
Шаг 3. $\overline{(x > 2)} \wedge (y \geq 1)$

Контрольная работа выполнена на сайте www.matburo.ru

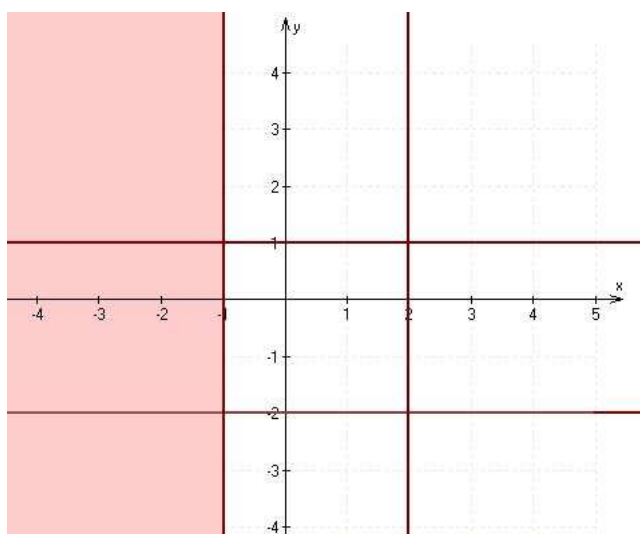
Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_appear.php?p=dm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию



Шаг 4. ($x < -1$)



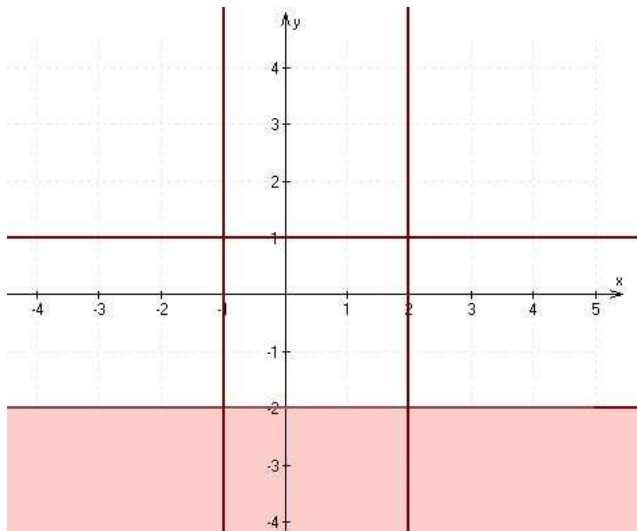
Шаг 5. ($y < -2$)

Контрольная работа выполнена на сайте www.matburo.ru

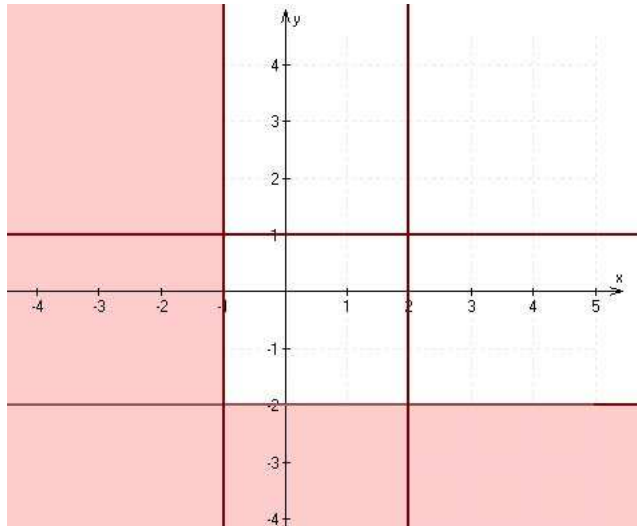
Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_appear.php?p=dm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию



Шаг 6. $((x < -1) \vee (y < -2))$

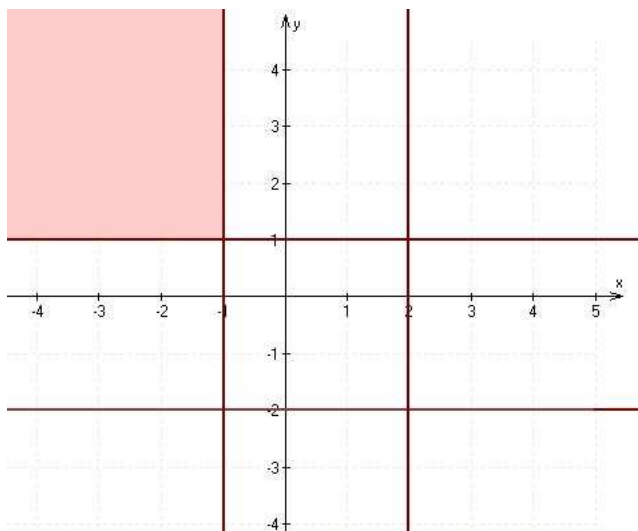


Шаг 7. $((\overline{(x > 2)} \wedge (y \geq 1)) \wedge ((x < -1) \vee (y < -2)))$

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_appear.php?p=dm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию



Задача 15. Построить машину Тьюринга, которая применима ко всем словам в алфавите $\{a_0, a_1, a_2\}$ и делает следующее: любое слово $x_1x_2\dots x_n$, где $x_i = a_1$ или $x_i = a_2$ ($i = 1, 2, \dots, n$) преобразует в слово $x_2x_3\dots x_nx_1$.

Решение. Нужно построить машину, которая запоминает первую букву слова, стирает ее, двигается до конца слова и в конце записывает данную букву, после чего останавливается. Считаем, что пустая ячейка в данном алфавите $\{a_0, a_1, a_2\}$ обозначается символом a_0 .

Составляем программу. Начальное состояние машины обозначим q_0 , конечное - q_z . Перемещение головки машины обозначаем символами L, R, S (влево, вправо, стоп). Считаем, что головка машины стоит в начале слова и обозревает первый его символ (так как из любого другого состояния машину легко привести в данное, это не ограничивает задачу).

$q_0a_0 \rightarrow q_z a_0 S$ если ячейка пустая (слово пустое), заканчиваем работу.

$q_0a_1 \rightarrow q_1 a_0 R$ если ячейка непустая, запоминаем данный символ в номере состояния и сдвигаемся вправо.

Контрольная работа выполнена на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_appear.php?p=dm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$q_0a_2 \rightarrow q_2a_0R$ если ячейка непустая, запоминаем данный символ в номере состояния и сдвигаемся вправо.

Далее проверяем, если ячейки непустые, двигаемся вправо:

$$q_1a_1 \rightarrow q_1a_1R,$$

$$q_1a_2 \rightarrow q_1a_2R,$$

$$q_2a_1 \rightarrow q_2a_1R,$$

$$q_2a_2 \rightarrow q_2a_2R.$$

Если доходим до пустой ячейки, записываем в нее запомненный символ и завершаем работу:

$$q_1a_0 \rightarrow q_2a_1S,$$

$$q_2a_0 \rightarrow q_2a_2S.$$