Элементы аналитической геометрии
Контрольная работа

Задача 1. Дан треугольник ABC с вершинами

A(m + 1; n + 1),
B(m; -n) и
C(-m; n).
Найти:

a) величину угла A;
b) координаты точек пересечения меридиан;
c) координаты точек пересечения высот;
d) длину высоты, опущенной от вершины A;
e) площадь треугольника ABC;
f) систему неравенств, задающих внутренность треугольника ABC, и сделать чертеж.

Решение. Получаем координаты точек: $A(4;4)$, $B(3;-3)$ и $C(-3;3)$.

Найдем уравнения сторон треугольника ABC и их угловые коэффициенты.

Уравнение стороны AB:

$\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$,

$\dfrac{x-4}{3-4}=\dfrac{y-4}{-3-4}$,

$\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y-4}{-7}$,

$y-4=7x-28$,

$y=7x-24$, угловой коэффициент $k_{AB}=7$.

Уравнение стороны AC:

$\dfrac{x-x_A}{x_C-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_C-y_A}$,

$\dfrac{x-4}{-3-4}=\dfrac{y-4}{3-4}$,

$\dfrac{x-4}{-7}=\dfrac{y-4}{-1}$,

$x-4=7y-28$,

$7y=x+24$,

$y=\dfrac{1}{7}x+\dfrac{24}{7}$, угловой коэффициент $k_{AC}=\dfrac{1}{7}$.

.Уравнение стороны BC:

$\dfrac{x-x_B}{x_C-x_B}=\dfrac{y-y_B}{y_C-y_B}$,

$\dfrac{x-3}{-3-3}=\dfrac{y+3}{3+3}$,

$\frac{x-3}{-6}=\frac{y+3}{6}$,

$3-x=y+3$,

$y=-x$, угловой коэффициент $k_{BC}=-1$.

А) Найдем величину угла A по формуле:

$\operatorname{tg} A=\left|\frac{k_{AB}-k_{AC}}{1+k_{AB}\cdot k_{AC}}\right|=\left|\frac{7-1/7}{1+7\cdot 1/7}\right|=\frac{24}{7}$, откуда $\angle A=\operatorname{arctg}\frac{24}{7}\approx 1,287\ рад.\approx 73,74^0$

Б) Найдем координаты точки пересечения меридиан.

Найдем середину стороны AC, точку M:

$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{4-3}{2}=\frac{1}{2}$, $y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{4+3}{2}=\frac{7}{2}$. Получаем $M(0,5;3,5)$.

Рассмотрим медиану BM. Известно, что точка пересечения медиан делит медиану в отношении 2:1, считая от вершины, то есть для точки пересечения K верно:

$BK:KM=2:1=2=\lambda$, поэтому координаты точки K

$x_K=\frac{x_B+\lambda x_M}{1+\lambda}=\frac{3+1}{3}=\frac{4}{3}$, $y_K=\frac{y_B+\lambda y_M}{1+\lambda}=\frac{-3+7}{3}=\frac{4}{3}$.

Точка пересечения медиан $K\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$.

В) Найдем координаты точки пересечения высот. Для этого найдем уравнения двух высот

Высота AD, проведенная к стороне BC:

$y-y_A=-\frac{1}{k_{BC}}(x-x_A)$,

$y-4=1(x-4)$,

$y=x$

Высота BE, проведенная к стороне AC:

$y-y_B=-\frac{1}{k_{AC}}(x-x_B)$,

$y+3=-7(x-3)$,

$y+3=-7x+21$,

$y+7x=18$.

Найдем точку пересечения высот, решая систему:

$$\begin{cases} y=x \\ y+7x=18. \end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{cases} x=\frac{9}{4}, \\ y=\frac{9}{4}. \end{cases}$$

Точка пересечения высот $N\left(\frac{9}{4};\frac{9}{4}\right)$

Г) Найдем длину высоты, опущенной от вершины A. Это есть расстояние от вершины A до прямой BC: $y-x=0$, то есть

$$d=\frac{|y_A+x_A|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|4+4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}.$$

Д) Найдем площадь треугольника ABC по формуле $S=\frac{1}{2}|\Delta|$, где

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_A & x_B & x_C\\ y_A & y_B & y_C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 3 & -3\\ 4 & -3 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -3\\ -3 & 3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}4 & -3\\ 4 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 3\\ 4 & -3\end{vmatrix}=0-24-24=-48.$$

Таким образом, площадь $S=\frac{1}{2}|\Delta|=\frac{48}{2}=24$.

Найдем систему неравенств, задающих внутренность треугольника ABC,

Теперь подставляем в уравнение прямых точки (вершины треугольника), чтобы выделить ту полуплоскость, в которой лежит треугольник:

Сторона AB $y-7x+24=0$, подставляем точку $C(-3;3)$: 3+21+24>0

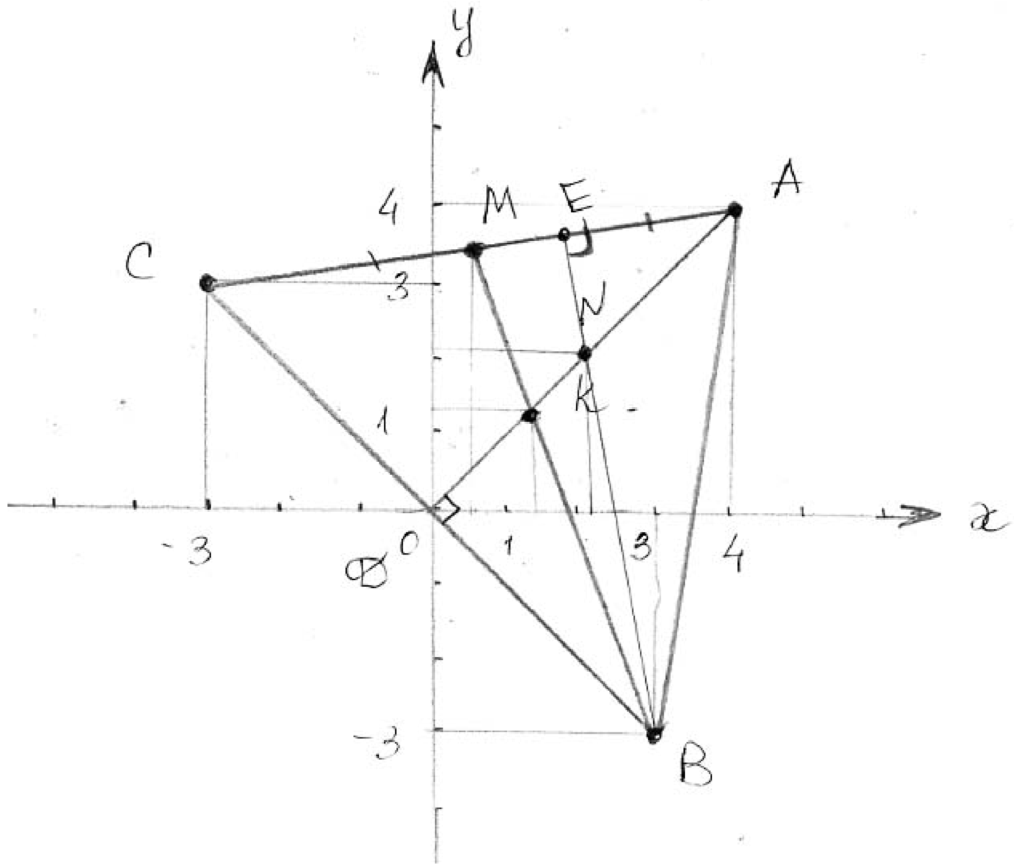
Сторона BC $y+x=0$, подставляем точку $A(4;4)$: 4+4>0

Сторона AC $7y-x-24=0$, подставляем точку $B(3;-3)$: -21-3-21<0

Получаем систему:

$$\begin{cases}y-7x+24>0,\\ y+x>0,\\ 7y-x-24<0.\end{cases}$$

Сделаем чертеж.


y
x
A
B
C
M
E
N
K
4
3
1
-3
0
1
3
4
-3

Задача 2. Даны координаты вершин пирамиды. Найти: 1) длину ребер A_1A_2 и A_1A_3; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) объем пирамиды; 5) уравнения прямой A_1A_2; 6) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 7) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 8) уравнения высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Координаты вершин приведены в таблице.

	Координаты точки			
	A_1	A_2	A_3	A_4
С	(6; 6; 5)	(4; 9; 5)	(4; 6; 11)	(6; 9; 3)

Решение.

1) Длины ребер A_1A_2 и A_1A_3

$$\overrightarrow{A_1A_2}=(4-6;9-6;5-5)=(-2;3;0)$$
$$\overrightarrow{A_1A_3}=(4-6;6-6;11-5)=(-2;0;6)$$
$$A_1A_2=\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt{(-2)^2+3^2+0^2}=\sqrt{4+9+0}=\sqrt{13}$$
$$A_1A_3=\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\sqrt{(-2)^2+0^2+6^2}=\sqrt{4+0+36}=\sqrt{40}$$

2) Угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3.

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|}=\frac{-2\cdot(-2)+3\cdot 3+0\cdot 0}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{40}}=\frac{4+9}{\sqrt{520}}=\frac{13}{\sqrt{520}}$$
$$\alpha=\arccos\frac{13}{\sqrt{520}}\approx\arccos\frac{13}{\sqrt{520}}\approx\arccos 0{,}57\approx 55^\circ$$

3) Площадь грани $A_1A_2A_3$.

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -2 & 3 & 0\\ -2 & 0 & 6\end{vmatrix}=i\cdot\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 6\end{vmatrix}-j\cdot\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -2 & 6\end{vmatrix}+k\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -2 & 0\end{vmatrix}=$$
$$=18i+12j+6k$$
$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\sqrt{18^2+12^2+6^2}=\sqrt{504}$$
$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\frac{\sqrt{504}}{2}=\sqrt{\frac{504}{4}}=\sqrt{126}\ (\text{ед}^2)$$

4) Объем пирамиды.

$$\overrightarrow{A_1A_4}=(6-6;9-6;3-5)=(0;3;-2)$$

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2},\ \overrightarrow{A_1A_3},\ \overrightarrow{A_1A_4}\right)=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 0\\ -2 & 0 & 6\\ 0 & 3 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=-2\cdot\begin{vmatrix}0 & 6\\ 3 & -2\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}-2 & 6\\ 0 & -2\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-2\cdot(0-18)-3\cdot(4-0)+0=$$

$$=36-12=24$$

$$V=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{A_1A_2},\ \overrightarrow{A_1A_3},\ \overrightarrow{A_1A_4}\right)=\frac{1}{6}\cdot 24=4\ (\text{ед}^3)$$

5) Уравнение прямой A_1A_2:

$$\frac{x-6}{4-6}=\frac{y-6}{9-6}=\frac{z-5}{5-5}$$

$$\frac{x-6}{-2}=\frac{y-6}{3}=\frac{z-5}{0}$$

6) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix}x-6 & y-6 & z-5\\ 4-6 & 9-6 & 5-5\\ 4-6 & 6-6 & 11-5\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}x-6 & y-6 & z-5\\ -2 & 3 & 0\\ -2 & 0 & 6\end{vmatrix}=(x-6)\cdot\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 6\end{vmatrix}-(y-6)\cdot\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -2 & 6\end{vmatrix}+$$

$$+(z-5)\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -2 & 0\end{vmatrix}=(x-6)\cdot 18-(y-6)\cdot(-12)+(z-5)\cdot 6=$$

$$=18x-108+12y-72+6z-30=18x+12y+6z-210=$$

$$=2(9x+6y+3z-105)$$

Уравнение плоскости:

$$9x+6y+3z-105=0$$

7) Угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$:

$$\sin\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{A_1A_4}\cdot\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|}=\frac{|0\cdot 18+3\cdot 12-2\cdot 6|}{\sqrt{0^2+3^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{504}}=$$

$$=\frac{24}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{504}}=\frac{24}{\sqrt{6552}}=\sqrt{\frac{579}{6552}}=\sqrt{\frac{8}{91}}\approx 0{,}297$$

$$\varphi\approx 17^\circ$$

8) Уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Уравнение грани $A_1A_2A_3$: $9x+6y+3z-105=0$.

Ее нормальный вектор $\overline{n} = (9;\ 6;\ 3)$ примем за направляющий вектор высоты пирамиды.
$A_4(4;\ 6;\ 11)$
Уравнение высоты:
$$\frac{x-4}{9} = \frac{y-6}{6} = \frac{z-11}{3}$$

Задача 3. Точки A, B, C, A' являются вершинами параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$
Найти

Координаты вершины D
Площадь грани ABCD
Уравнение грани ABCD
Объем параллелепипеда ABCD $A'B'C'D'$
Уравнение ребра A A'
Угол образованный ребром A A' с ребром AB
Угол образованный ребром A A' с плоскостью основания ABCD

Сделать точный рисунок в системе координат.
A(7,6,-1),B(3,4,-1),C(1,0,-2), A'(0,2,-8)

Решение.
1) Так как $ABCDA'B'C'D'$ - параллелепипед, то $\overline{BC} = \overline{AD}$. Найдем координаты этих векторов и приравняем.
$\overline{BC} = \{1-3; 0-4; -2+1\} = \{-2; -4; -1\}$.
Пусть координаты точки $D(x_D, y_D, z_D)$.
$\overline{AD} = \{x_D - 7; y_D - 6; z_D + 1\}$.
Получаем:
$\{x_D - 7; y_D - 6; z_D + 1\} = \{-2; -4; -1\}$,
$x_D - 7 = -2,\ x_D = 5;$
$y_D - 6 = -4,\ y_D = 2;$
$z_D + 1 = -1,\ z_D = -2.$

Координаты вершины $D(5, 2, -2)$

2) Найдем координаты векторов:
$\overline{AB} = \{3-7; 4-6; -1+1\} = \{-4; -2; 0\}$,
$\overline{AD} = \{5-7; 2-6; -2+1\} = \{-2; -4; -1\}$,
$\overline{AA'} = \{0-7; 2-6; -8+1\} = \{-7; -4; -7\}$.

Вычислим векторное произведение:
$$\overline{AB} \times \overline{AD} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -4 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 12\bar{k} = \{2; -4; 12\}.$$
Найдем площадь грани $ABCD$ по формуле:
$$S_{ABCD} = \left|\overline{AB} \times \overline{AD}\right| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 12^2} = \sqrt{4 + 16 + 144} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}.$$

В качестве нормали к грани $ABCD$ можно выбрать вектор $\bar{n} = \frac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{AD} = \{1; -2; 6\}$.

Уравнение плоскости примет вид:
$1(x - x_A) - 2(y - y_A) + 6(z - z_A) = 0$,
$(x - 7) - 2(y - 6) + 6(z + 1) = 0$,

$x-7-2y+12+6z+6=0$,
$x-2y+6z+11=0$.

Найдем объем параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$. Для этого вычислим смешанное произведение:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AA'}=\begin{vmatrix}-4 & -2 & 0\\ -2 & -4 & -1\\ -7 & -4 & -7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4 & -2 & 0\\ 2 & 4 & 1\\ 7 & 4 & 7\end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix}4 & 1\\ 4 & 7\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & 1\\ 7 & 7\end{vmatrix}=$$
$$=-4(28-4)+2(14-7)=-96+14=-82.$$

Тогда объем параллелепипеда равен: $V_{ABCDA'B'C'D'}=\left|\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AA'}\right|=82.$

Уравнение ребра AA' имеет вид
$$\frac{x-7}{-7}=\frac{y-6}{-4}=\frac{z+1}{-7} \quad \text{или} \quad \frac{x-7}{7}=\frac{y-6}{4}=\frac{z+1}{7}.$$

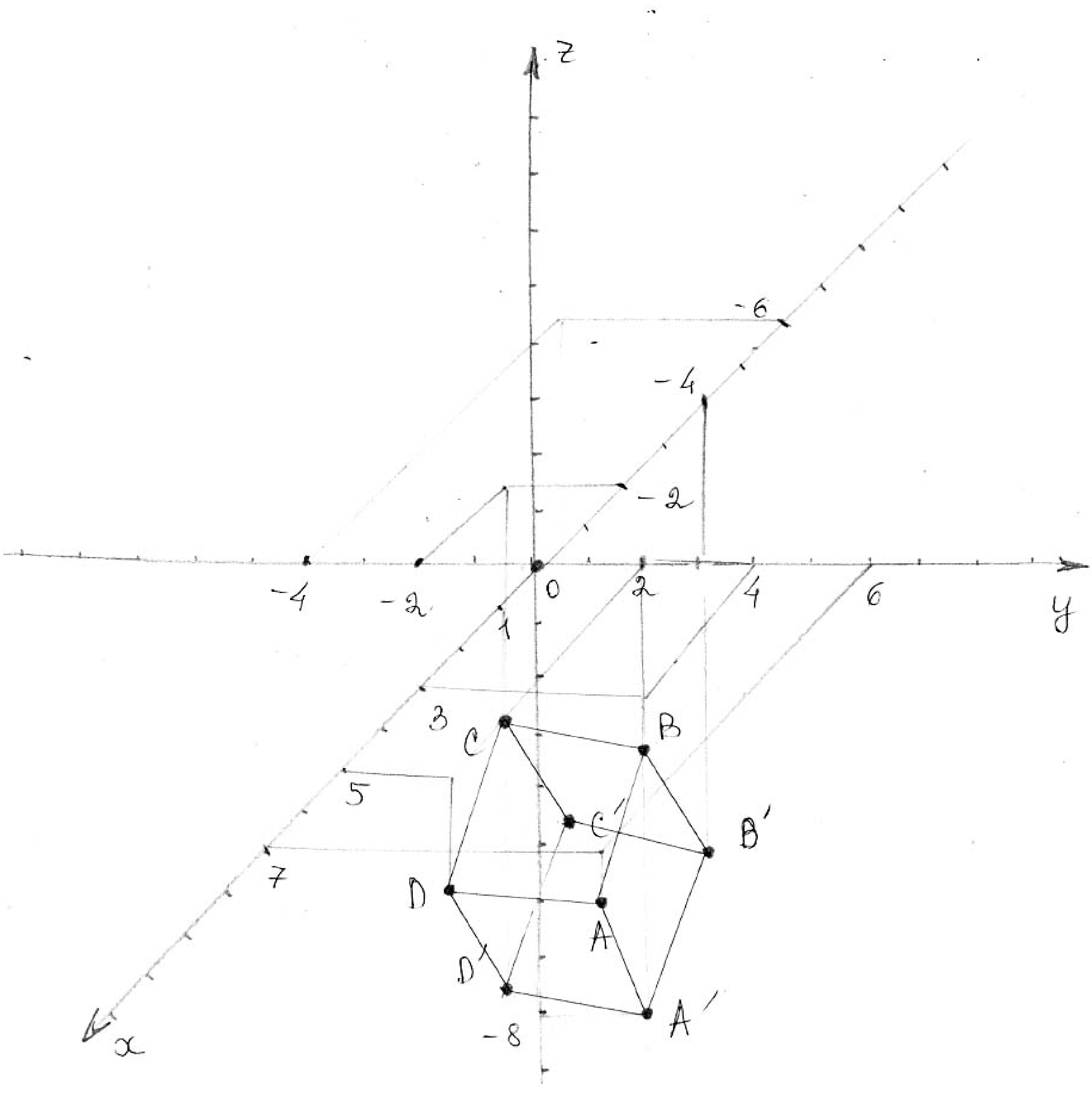
Найдем угол α, образованный ребром AA' с ребром AB по формуле:
$$\cos\alpha=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AA'}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AA'}\right|}=\frac{-4\cdot(-7)-2\cdot(-4)+0\cdot(-7)}{\sqrt{16+4}\cdot\sqrt{49+16+49}}=\frac{28+8}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{114}}=\frac{36}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{114}}=\frac{18}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{114}},\text{ откуда}$$

$$\alpha=\arccos\left(\frac{18}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{114}}\right)\approx 0,717\ \textit{рад}\approx 41^0.$$

Найдем угол β, образованный ребром AA' с плоскостью основания $ABCD$
$$\sin\beta=\frac{\overline{AA'}\cdot\overline{n}}{\left|\overline{AA'}\right|\cdot|\overline{n}|}=\frac{-7\cdot1-4\cdot(-2)-7\cdot6}{\sqrt{49+16+49}\sqrt{1+4+36}}=\frac{-7+8-42}{\sqrt{114}\cdot\sqrt{41}}=\frac{-41}{\sqrt{114}\cdot\sqrt{41}}=-\frac{\sqrt{41}}{\sqrt{114}}$$
откуда $\beta=\arcsin\left(-\frac{\sqrt{41}}{\sqrt{114}}\right)\approx -0,643\,\textit{рад}\approx -37^0$.

Сделаем точный рисунок в системе координат. Для этого вычислим координаты недостающих вершин:

$D'=\overline{AA'}+D=\{-7;-4;-7\}+(5;2;-2)=(-2;-2;-9)$
$C'=\overline{AA'}+C=\{-7;-4;-7\}+(1;0;-2)=(-6;-4;-9)$
$B'=\overline{AA'}+B=\{-7;-4;-7\}+(3;4;-1)=(-4;0;-8)$


z
-6
-4
-2
-4
-2
0
2
4
6
y
1
3
5
7
x
C
B
C'
B'
D
A
D'
A'
-8

Задача 4. Линия задана уравнением $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат. Требуется:

1. построить линию по точкам от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$, придавая φ значения через промежуток $\frac{\pi}{8}$;
2. найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью;
3. по уравнению в декартовой прямоугольной системе координат определить, какая это линия. Уравнение $r = r(\varphi)$ приведено в таблице 2.

Таблица 2

	r
С	$\dfrac{2}{1+\cos\varphi}$

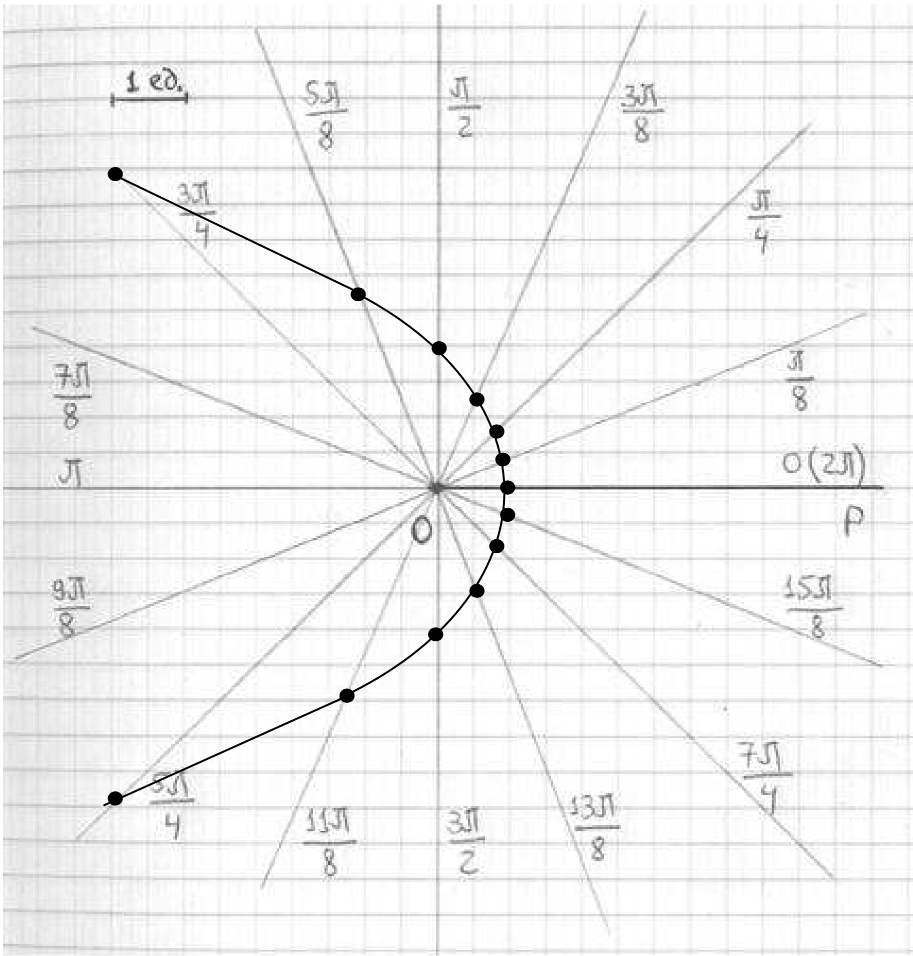
Решение.

1. Построим таблицу значений функции.

φ	$\cos\varphi$	$r = \dfrac{2}{1+\cos\varphi}$
0	1	1
$\frac{\pi}{8}$	0,92	1,04
$\frac{\pi}{4}$	0,71	1,17
$\frac{3\pi}{8}$	0,38	1,45
$\frac{\pi}{2}$	0	2
$\frac{5\pi}{8}$	–0,38	3,24
$\frac{3\pi}{4}$	–0,71	6,83
$\frac{7\pi}{8}$	–0,92	26,27
π	–1	Не сущ.
$\frac{9\pi}{8}$	–0,92	26,27
$\frac{5\pi}{4}$	–0,71	6,83
$\frac{11\pi}{8}$	–0,38	3,24
$\frac{3\pi}{2}$	0	2
$\frac{13\pi}{8}$	0,38	1,45

$\frac{7\pi}{4}$	0,71	1,17
$\frac{15\pi}{8}$	0,92	1,04
2π	1	1

Построим график функции по точкам.



2. Найдем уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью.

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Подставим значения.

$$r=\frac{2}{1+\cos\varphi}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2}{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}-\frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+x}=0$$

$$\sqrt{x^2+y^2}\left(1-\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)=0$$

$$\sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x-2}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)=0$$

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\left(\sqrt{x^2+y^2}+x-2\right)=0$$

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+x}=0 \text{ или } \sqrt{x^2+y^2}+x-2=0$$

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+x}=0 \text{ при } x=y=0$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=2-x$$

$$x^2+y^2=(2-x)^2$$

$$x^2+y^2=4-4x+x^2$$

$$y^2=4-4x$$

$$y^2=-4x+4$$

$$y^2=-4(x-1)$$

3. По уравнению в декартовой прямоугольной системе координат определим, какая это линия.

Получили уравнение параболы $y^2=2px$

$p=2$

Вершина параболы смещена на 1 единицу вправо по оси Ox.