Контрольная работа
Вычисление неопределенных интегралов

Задание № 1.2.
Найти интегралы, предварительно преобразовав подынтегральное выражение:

$$\int \frac{\left(-6\sqrt[3]{x^2}-7\sqrt[3]{x^2}\right)^2}{-2\sqrt[3]{x^2}}dx\ ;\ \int \frac{x^5+4x^8\cos x}{x^8}dx\ .$$

Решение.

1) $$\int \frac{\left(-6\sqrt[3]{x^2}-7\sqrt[3]{x^2}\right)^2}{-2\sqrt[3]{x^2}}dx=\int \frac{\left(-13\sqrt[3]{x^2}\right)^2}{-2\sqrt[3]{x^2}}dx=\int \frac{169\sqrt[3]{x^4}^{\,2}}{-2\sqrt[3]{x^2}}dx=-\frac{169}{2}\int \frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}}dx=-\frac{169}{2}\int \sqrt[3]{x^2}dx=$$

$$=-\frac{169}{2}\cdot\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C=-\frac{507}{10}\sqrt[3]{x^5}+C.$$

2) $$\int \frac{x^5+4x^8\cos x}{x^8}dx=\int\left(\frac{1}{x^3}+4\cos x\right)dx=\int\frac{dx}{x^3}+4\int\cos x dx=-\frac{1}{2x^2}+4\sin x+C.$$

Задание № 2.2.
Найти интегралы, предварительно преобразовав подынтегральное выражение:

$$\int 2\cos(3x-8)dx\ .$$

Решение.

$$\int 2\cos(3x-8)dx=\left\|dx=\frac{1}{3}d(3x)\right\|=\frac{2}{3}\int\cos(3x-8)d(3x)=\left\|d(3x)=d(3x-8)\right\|=$$

$$=\frac{2}{3}\int\cos(3x-8)d(3x-8)=\frac{2}{3}\sin(3x-8)+C.$$

Задание № 3.2.
Найти неопределенные интегралы, сделав подходящую замену переменной:

1) $\displaystyle\int \frac{-84x+70}{\sqrt[3]{-6x^2+10x-2}}dx\ ;$

2) $\displaystyle\int -8\sin(\cos(9x+8)-6)\sin(9x+8)dx\ ;$

3) $\displaystyle\int -6\sqrt[8]{9-10\sqrt[3]{5x+3}}dx\ ;$

4) $\displaystyle\int \frac{14-70x}{10x^2+5x+7}dx\ .$

Решение.

1)

$$\int\frac{-84x+70}{\sqrt[3]{-6x^2+10x-2}}dx=\left\|\begin{array}{l}(-84x+70)dx=d(-42x^2+70x)=\\=7d(-6x^2+10x)=7d(-6x^2+10x-2)\end{array}\right\|=7\int\frac{d(-6x^2+10x-2)}{\sqrt[3]{-6x^2+10x-2}}=$$

$$=\left\|\begin{array}{c}\text{замена}\\t=-6x^2+10x-2\end{array}\right\|=7\int\frac{dt}{\sqrt[3]{t}}=7\int t^{-\frac{1}{3}}dt=7\cdot\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+C=\left\|t=-6x^2+10x-2\right\|=\frac{21}{2}\sqrt[3]{(-6x^2+10x-2)^2}+C.$$

2)

$$\int-8\sin(\cos(9x+8)-6)\sin(9x+8)dx=\left\|\begin{array}{c}\text{замена}\\t=\cos(9x+8)\\dt=\frac{1}{9}\sin(9x+8)dx\end{array}\right\|=-72\int\sin(t-6)dt=\left\|dt=d(t-6)\right\|=$$

$$=-72\int\sin(t-6)d(t-6)=72\cos(t-6)+C=\left\|t=\cos(9x+8)\right\|=72\cos(\cos(9x+8)-6)+C.$$

3)

$$\int-6\sqrt[8]{9-10\sqrt[3]{5x+3}}dx=\left\|\begin{array}{l}\text{замена}\\t=\sqrt[8]{9-10\sqrt[3]{5x+3}}\\t^8=9-10\sqrt[3]{5x+3}\\\sqrt[3]{5x+3}=\frac{9-t^8}{10}\\5x+3=\left(\frac{9-t^8}{10}\right)^3=\frac{729}{1000}-\frac{243}{1000}t^8+\frac{27}{1000}t^{16}-\frac{1}{1000}t^{24}\\x=-\frac{2271}{5000}-\frac{243}{5000}t^8+\frac{27}{5000}t^{16}-\frac{1}{5000}t^{24}\\dx=\left(-\frac{243}{625}t^7+\frac{54}{625}t^{15}-\frac{24}{625}t^{23}\right)dt\end{array}\right\|=$$

$$=-6\int t\left(-\frac{243}{625}t^7+\frac{54}{625}t^{15}-\frac{24}{625}t^{23}\right)dt=-6\int\left(-\frac{243}{625}t^8+\frac{54}{625}t^{16}-\frac{24}{625}t^{24}\right)dt=$$

$$=\frac{1458}{625}\int t^8dt-\frac{324}{625}\int t^{16}dt+\frac{144}{625}\int t^{24}dt=\frac{1458}{625}\cdot\frac{t^9}{9}-\frac{324}{625}\cdot\frac{t^{17}}{17}+\frac{144}{625}\cdot\frac{t^{25}}{25}+C=\frac{162}{625}t^9-\frac{324}{10625}t^{17}+\frac{144}{15625}t^{25}+C=$$

$$=\left\|t=\sqrt[8]{9-10\sqrt[3]{5x+3}}\right\|=\frac{162}{625}\sqrt[8]{\left(9-10\sqrt[3]{5x+3}\right)^9}-\frac{324}{10625}\sqrt[8]{\left(9-10\sqrt[3]{5x+3}\right)^{17}}+\frac{144}{15625}\sqrt[8]{\left(9-10\sqrt[3]{5x+3}\right)^{25}}+C.$$

4)

$$\int\frac{14-70x}{10x^2+5x+7}dx=\left\|\begin{aligned}&10x^2+5x+7=10\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{10}\right)=\\&=10\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+\frac{7}{10}\right)=\\&=10\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)+\frac{51}{8}=10\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{51}{8}=\\&=10\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{51}{80}\right)\end{aligned}\right\|=\int\frac{14-70x}{10\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{51}{80}\right)}dx=$$

$$=\frac{1}{10}\int\frac{14-70x}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{51}{80}}dx=\left\|\begin{aligned}&\text{замена}\\&t=x+\frac{1}{4}\\&x=t-\frac{1}{4}\\&\text{dx}=dt\end{aligned}\right\|=\frac{1}{10}\int\frac{14-70\left(t-\frac{1}{4}\right)}{t^2+\frac{51}{80}}dt=-7\int\frac{tdt}{t^2+\frac{51}{80}}+\frac{63}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{51}{80}}=\left\|\begin{aligned}&tdt=\frac{1}{2}d\left(t^2\right)=\\&=\frac{1}{2}d\left(t^2+\frac{51}{80}\right)\end{aligned}\right\|=$$

$$=-\frac{7}{2}\int\frac{d\left(t^2+\frac{51}{80}\right)}{t^2+\frac{51}{80}}+\frac{63}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{51}{80}}=-\frac{7}{2}\ln\left|t^2+\frac{51}{80}\right|+\frac{63}{2}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{51}}\cdot\ln\left|\frac{t+\frac{\sqrt{51}}{4\sqrt{5}}}{t-\frac{\sqrt{51}}{4\sqrt{5}}}\right|+C=$$

$$=-\frac{7}{2}\ln\left|t^2+\frac{51}{80}\right|+\frac{126\sqrt{5}}{\sqrt{51}}\cdot\ln\left|\frac{4\sqrt{5}t+\sqrt{51}}{4\sqrt{5}t-\sqrt{51}}\right|+C=\left\|t=x+\frac{1}{4}\right\|=-\frac{7}{2}\ln\left|\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{51}{80}\right|+$$

$$+\frac{126\sqrt{5}}{\sqrt{51}}\ln\left|\frac{4\sqrt{5}\left(x+\frac{1}{4}\right)+\sqrt{51}}{4\sqrt{5}\left(x+\frac{1}{4}\right)-\sqrt{51}}\right|+C=-\frac{7}{2}\ln\left|x^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{10}\right|+\frac{126\sqrt{5}}{\sqrt{51}}\ln\left|\frac{4\sqrt{5}x+\sqrt{5}+\sqrt{51}}{4\sqrt{5}x+\sqrt{5}-\sqrt{51}}\right|+C.$$

Задание № 4.2.
Найти неопределенные интегралы, используя формулу интегрирования по частям:
1) $\int x^3 \sin 6x dx$;
2) $\int x^2 e^{10x} dx$;
3) $\int x^7 \ln 10x dx$;
4) $\int \arccos 6x dx$.

Решение.
1)

$$\int x^3 \sin 6x dx = \left\| \begin{matrix} \text{интегрируем по частям} \\ U = x^3;\ dU = 3x^2 dx \\ dV = \sin 6x dx;\ V = -\frac{1}{6}\cos 6x \end{matrix} \right\| = -\frac{x^3}{6}\cos 6x + \frac{1}{2}\int x^2 \cos 6x dx = \left\| \begin{matrix} \text{интегрируем по частям} \\ U = x^2;\ dU = 2x dx \\ dV = \cos 6x dx;\ V = \frac{1}{6}\sin 6x \end{matrix} \right\| =$$

$$= -\frac{x^3}{6}\cos 6x + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6}\sin 6x - \frac{1}{3}\int x \sin 6x dx\right) = -\frac{x^3}{6}\cos 6x + \frac{x^2}{12}\sin 6x - \frac{1}{6}\int x \sin 6x dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \text{интегрируем по частям} \\ U = x;\ dU = dx \\ dV = \sin 6x dx;\ V = -\frac{1}{6}\cos 6x \end{matrix} \right\| = -\frac{x^3}{6}\cos 6x + \frac{x^2}{12}\sin 6x - \frac{1}{6}\left(-\frac{x}{6}\cos 6x + \frac{1}{6}\int \cos 6x dx\right) =$$

$$= -\frac{x^3}{6}\cos 6x + \frac{x^2}{12}\sin 6x + \frac{x}{36}\cos 6x - \frac{1}{216}\sin 6x + C.$$

2)

$$\int x^2 e^{10x} dx = \left\| \begin{matrix} \text{интегрируем по частям} \\ U = x^2;\ dU = 2x dx \\ dV = e^{10x} dx;\ V = \frac{1}{10}e^{10x} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{10}x^2 e^{10x} - \frac{1}{5}\int x e^{10x} dx = \left\| \begin{matrix} \text{интегрируем по частям} \\ U = x;\ dU = dx \\ dV = e^{10x} dx;\ V = \frac{1}{10}e^{10x} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{10}x^2 e^{10x} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{10}x e^{10x} - \frac{1}{10}\int e^{10x} dx\right) = \frac{1}{10}x^2 e^{10x} - \frac{1}{50}x e^{10x} + \frac{1}{500}e^{10x} + C.$$

3)

$$\int x^7 \ln 10x dx = \left\| \begin{matrix} \text{интегрируем по частям} \\ U = \ln 10x;\ dU = \frac{dx}{x} \\ dV = x^7 dx;\ V = \frac{1}{8}x^8 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{8}x^8 \ln 10x - \frac{1}{8}\int x^7 dx = \frac{1}{8}x^8 \ln 10x - \frac{1}{64}x^8 + C.$$

4)

$$\int \arccos 6x dx = \left\| \begin{matrix} \text{интегрируем по частям} \\ U = \arccos 6x;\ dU = -\frac{6dx}{\sqrt{1-36x^2}} \\ dV = dx;\ V = x \end{matrix} \right\| = x\arccos 6x + 6\int \frac{xdx}{\sqrt{1-36x^2}} = \left\| \begin{matrix} xdx = \frac{1}{2}d(x^2) = \\ = -\frac{1}{72}d(1-36x^2) \end{matrix} \right\| =$$

$$= x\arccos 6x - \frac{1}{12}\int \frac{d(1-36x^2)}{\sqrt{1-36x^2}} = x\arccos 6x - \frac{1}{6}\sqrt{1-36x^2} + C.$$

Задание № 5.2.
Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{10x+6}{x^2-3x-10}dx.$$

Решение.
Разложим подынтегральную правильную рациональную дробь на элементарные слагаемые дроби:
– разложим знаменатель дроби на простейшие действительные множители:
$x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$;
– напишем схему разложения подынтегральной дроби на элементарные слагаемые дроби:

$$\frac{10x+6}{x^2-3x-10} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-5};$$

– освободимся от знаменателей, умножая обе части равенства на $(x + 2)(x - 5)$:
$10x + 6 = A(x - 5) + B(x + 2)$,
$10x + 6 = (A + B)x + (2B - 5A)$;
– составим и решим систему уравнений, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного тождества:

$A + B = 10$, $\quad A = 2$,
$2B - 5A = 6$, $\quad B = 8$;

– подставим найденные значения постоянных A, B и C в схему разложения:

$$\frac{10x+6}{x^2-3x-10} = \frac{2}{x+2} + \frac{8}{x-5}.$$

Подставляя под знак интеграла полученную сумму элементарных дробей и интегрируя каждое слагаемое отдельно, найдем:

$$\int \frac{10x+6}{x^2-3x-10}dx = \int\left(\frac{2}{x+2} + \frac{8}{x-5}\right)dx = 2\int\frac{dx}{x+2} + 8\int\frac{dx}{x-5} = 2\ln|x+2| + 8\ln|x-5| + C.$$

Задание № 6.2.
Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{-2x^3-17x^2-16x+5}{(x-3)(x+2)^3}dx.$$

Решение.
Разложим подынтегральную правильную рациональную дробь на элементарные слагаемые дроби:
– напишем схему разложения подынтегральной дроби на элементарные слагаемые дроби:

$$\frac{-2x^3-17x^2-16x+5}{(x-3)(x+2)^3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{(x+2)^3};$$

– освободимся от знаменателей, умножая обе части равенства на $(x-3)(x+2)^3$:

$-2x^3 - 17x^2 - 16x + 5 = A(x+2)^3 + B(x-3)(x+2)^2 + C(x-3)(x+2) + D(x-3)$,

$-2x^3 - 17x^2 - 16x + 5 = (A+B)x^3 + (6A+B+C)x^2 + (12A-8B-C+D)x + (8A-12B-6C-3D)$;

– составим и решим систему уравнений, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного тождества:

$A + B = -2,$ $\quad$ $A = -2,$

$6A + B + C = -17,$ $\quad$ $B = 0,$

$12A - 8B - C + D = -16,$ $\quad$ $C = -5,$

$8A - 12B - 6C - 3D = 5,$ $\quad$ $D = 3;$

– подставим найденные значения постоянных A, B и C в схему разложения:

$$\frac{-2x^3-17x^2-16x+5}{(x-3)(x+2)^3} = -\frac{2}{x-3} - \frac{5}{(x+2)^2} + \frac{3}{(x+2)^3}.$$

Подставляя под знак интеграла полученную сумму элементарных дробей и интегрируя каждое слагаемое отдельно, найдем:

$$\int\frac{-2x^3-17x^2-16x+5}{(x-3)(x+2)^3}dx = \int\left(-\frac{2}{x-3} - \frac{5}{(x+2)^2} + \frac{3}{(x+2)^3}\right)dx = -2\int\frac{dx}{x-3} - 5\int\frac{dx}{(x+2)^2} + 3\int\frac{dx}{(x+2)^3} =$$

$$= -2\ln|x-3| + \frac{5}{x+2} - \frac{3}{2(x+2)^2} + C.$$

Задание № 7.2.

Найти неопределенный интеграл:

$$\int\frac{-6x^2+10x+32}{(x-3)(x^2+4x+13)}dx.$$

Решение.

Разложим подынтегральную правильную рациональную дробь на элементарные слагаемые дроби:

– напишем схему разложения подынтегральной дроби на элементарные слагаемые дроби:

$$\frac{-6x^2+10x+32}{(x-3)(x^2+4x+13)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+13};$$

– освободимся от знаменателей, умножая обе части равенства на $x^2 + 4x + 13$:

$-6x^2 + 10x + 32 = A(x^2 + 4x + 13) + (Bx + C)(x - 3)$,

$-6x^2 + 10x + 32 = (A + B)x^2 + (4A - 3B + C)x + (13A - 3C)$;

– составим и решим систему уравнений, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного тождества:

$A + B = -6,$ $\quad$ $A = \frac{4}{17},$

$4A - 3B + C = 10,$ $\quad$ $B = -\frac{106}{17},$

$13A - 3C = 32,$ $\quad$ $C = -\frac{164}{17};$

– подставим найденные значения постоянных A, B и C в схему разложения:

$$\frac{-6x^2+10x+32}{(x-3)(x^2+4x+13)} = \frac{4}{17(x-3)} - \frac{106x+164}{17(x^2+4x+13)}.$$

Подставляя под знак интеграла полученную сумму элементарных дробей и интегрируя каждое слагаемое отдельно, найдем:

$$\int\frac{-6x^2+10x+32}{(x-3)(x^2+4x+13)}dx=\int\frac{4}{17(x-3)}dx-\int\frac{106x+164}{17(x^2+4x+13)}dx=\frac{4}{17}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{106}{17}\int\frac{x+\frac{82}{53}}{(x+2)^2+9}dx=$$

$$=\frac{4}{17}\ln|x-3|-\frac{106}{17}\int\frac{x+2-\frac{24}{53}}{(x+2)^2+9}dx=\frac{4}{17}\ln|x-3|-\frac{106}{17}\int\frac{x+2}{(x+2)^2+9}d(x+2)-\frac{48}{17}\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+9}=$$

$$=\frac{4}{17}\ln|x-3|-\frac{53}{17}\int\frac{d((x+2)^2+9)}{(x+2)^2+9}-\frac{48}{17}\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+9}=\frac{4}{17}\ln|x-3|-\frac{53}{17}\ln|x^2+4x+13|-\frac{16}{17}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}+C.$$

Задание № 8.2.
Найти неопределенный интеграл:

$$\int\frac{4x^2-12x-32}{x^3-10x^2+48x-64}dx.$$

Решение.
Разложим подынтегральную правильную рациональную дробь на элементарные слагаемые дроби:

– разложим знаменатель дроби на простейшие действительные множители:

$x^3 - 10x^2 + 48x - 64 = (x - 2)(x^2 - 8x + 32)$;

– напишем схему разложения подынтегральной дроби на элементарные слагаемые дроби:

$$\frac{4x^2-12x-32}{x^3-10x^2+48x-64}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2-8x+32};$$

– освободимся от знаменателей, умножая обе части равенства на $(x - 2)(x^2 - 8x + 32)$:

$4x^2 - 12x - 32 = A(x^2 - 8x + 32) + (Bx + C)(x - 2)$,

$4x^2 - 12x - 32 = (A + B)x^2 + (-8A - 2B + C)x + (32A - 2C)$;

– составим и решим систему уравнений, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного тождества:

$A + B = 4$, $A = -2$,
$-8A - 2B + C = -12$, $B = 6$,
$32A - 2C = -32$; $C = -16$;

– подставим найденные значения постоянных A, B и C в схему разложения:

$$\frac{4x^2-12x-32}{x^3-10x^2+48x-64}=-\frac{2}{x-2}+\frac{6x-16}{x^2-8x+32}.$$

Подставляя под знак интеграла полученную сумму элементарных дробей и интегрируя каждое слагаемое отдельно, найдем:

$$\int\frac{4x^2-12x-32}{x^3-10x^2+48x-64}dx=\int\left(-\frac{2}{x-2}+\frac{6x-16}{x^2-8x+32}\right)dx=-2\int\frac{dx}{x-2}dx+\int\frac{6x-16}{x^2-8x+32}dx=$$

$$=-2\ln|x-2|+6\int\frac{x-4+\frac{4}{3}}{(x-4)^2+16}dx=-2\ln|x-2|+6\int\frac{x-4}{(x-4)^2+16}d(x-4)+\frac{24}{3}\int\frac{d(x-4)}{(x-4)^2+16}=$$

$$=-2\ln|x-2|+3\int\frac{d((x-4)^2+16)}{(x-4)^2+16}+\frac{24}{3}\int\frac{d(x-4)}{(x-4)^2+16}=-2\ln|x-2|+3\ln|x^2-8x+32|+2\operatorname{arctg}\frac{x-4}{4}+C.$$

Задание № 9.2.
Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \cos 3x \sin 7x dx$;

2) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x} dx$;

3) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} dx$;

4) $\int \sin^2 9x \cos^4 9x dx$.

Решение.

1)

$$\int \cos 3x \sin 7x dx = \left\| \begin{array}{l} \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \\ \sin 7x \cos 3x = \frac{1}{2}[\sin 10x + \sin 4x] \end{array} \right\| = \frac{1}{2}\int (\sin 10x + \sin 4x) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 10x dx + \frac{1}{2}\int \sin 4x dx = -\frac{1}{20}\cos 10x - \frac{1}{8}\cos 4x + C.$$

2)

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x} dx = \int \frac{\sin^4 x \sin x}{\cos^8 x} dx = \left\| \begin{array}{l} \sin x dx = -d(\cos x) \\ \sin^2 x = 1-\cos^2 x \end{array} \right\| = -\int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^8 x} d(\cos x) = \left\| \begin{array}{l} \text{замена} \\ t = \cos x \end{array} \right\| = -\int \frac{(1-t^2)^2}{t^8} dt =$$

$$= -\int \frac{dt}{t^8} + 2\int \frac{dt}{t^6} dt - \int \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{9t^9} + \frac{2}{7t^7} - \frac{1}{5t^5} + C = \| t = \cos x \| = -\frac{1}{9\cos^9 x} + \frac{2}{7\cos^7 x} - \frac{1}{5\cos^5 x} + C.$$

3)

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} dx = \int \operatorname{ctg}^4 x dx = \left\| \begin{array}{l} \text{замена} \\ t = \operatorname{ctg} x \\ x = \operatorname{arcctg} t \\ dx = -\frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right\| = \int t^4 \cdot \left(-\frac{dt}{1+t^2}\right) = -\int \frac{t^4}{1+t^2} dt = \int \frac{(1+t^2)(1-t^2)-1}{1+t^2} dt =$$

$$= \int dt - \int t^2 dt - \int \frac{dt}{1+t^2} = t - \frac{1}{3}t^3 - \operatorname{arctg} t + C = \| t = \operatorname{ctg} x \| = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) + C =$$

$$= \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{x} + C.$$

4)

$$\int \sin^2 9x\cos^4 9xdx = \frac{1}{9}\int \sin^2 9x\cos^4 9xd(9x) = \left\| \begin{matrix} \text{замена} \\ t = 9x \end{matrix} \right\| = \frac{1}{9}\int \sin^2 t\cos^4 tdt = \left\| \begin{matrix} \sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t) \\ \cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t) \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{72}\int (1-\cos 2t)(1+\cos 2t)^2 dt = \frac{1}{72}\int \left(1+\cos 2t-\cos^2 2t-\cos^3 2t\right)dt = \frac{1}{72}\int dt + \frac{1}{72}\int \cos 2tdt - \frac{1}{72}\int \cos^2 2tdt -$$

$$-\frac{1}{72}\int \cos^3 2tdt = \left\| \cos^2 2t = \frac{1}{2}(1+\cos 4t) \right\| = \frac{1}{72}t + \frac{1}{144}\sin 2t - \frac{1}{144}\int (1+\cos 4t)dt - \frac{1}{72}\int \cos^2 2t\cos 2tdt =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \cos 2tdt = \frac{1}{2}d(\sin 2t) \\ \cos^2 2t = 1-\sin^2 2t \end{matrix} \right\| = \frac{1}{72}t + \frac{1}{144}\sin 2t - \frac{1}{144}\int dt - \frac{1}{144}\int \cos 4tdt - \frac{1}{144}\int \left(1-\sin^2 2t\right)d(\sin 2t) =$$

$$= \frac{1}{72}t + \frac{1}{144}\sin 2t - \frac{1}{144}t - \frac{1}{576}\sin 4t - \frac{1}{144}\int d(\sin 2t) + \frac{1}{144}\int \sin^2 2td(\sin 2t) =$$

$$= \frac{1}{144}t + \frac{1}{144}\sin 2t - \frac{1}{576}\sin 4t - \frac{1}{144}\sin 2t + \frac{1}{432}\sin^3 2t + C = \frac{1}{144}t - \frac{1}{576}\sin 4t + \frac{1}{432}\sin^3 2t + C =$$

$$= \left\| t = 9x \right\| = \frac{1}{16}x - \frac{1}{576}\sin 36x + \frac{1}{432}\sin^3 18x + C.$$

Задание № 10.2.
Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{16}{4\sin x + 13\cos x + 11}dx .$$

Решение.

$$\int \frac{16}{4\sin x + 13\cos x + 11}dx = \left\| \begin{matrix} \text{замена} \\ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2};\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right\| = \int \frac{16}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 13\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 11}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= 32\int \frac{dt}{4\cdot 2t + 13\left(1-t^2\right) + 11\left(1+t^2\right)} = 16\int \frac{dt}{12+4t-t^2} = -16\int \frac{dt}{t^2-4t-12} = -16\int \frac{dt}{t^2-4t+4-16} =$$

$$= -16\int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2-16} = -16\ln\left|\frac{(t-2)-4}{(t-2)+4}\right| + C = -16\ln\left|\frac{t-6}{t+2}\right| + C = \left\| t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \right\| = -16\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-6}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}\right| + C.$$

Задание № 11.2.
Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{4\operatorname{tg}x + 28}{7\sin 2x - \cos 2x + 41\cos^2 x}dx .$$

Решение.

$$\int \frac{4\mathrm{tg}x+28}{7\sin 2x-\cos 2x+41\cos^2 x}dx=\left\|\begin{array}{l}\text{замена}\\ t=\mathrm{tg}x;\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\\ \sin 2x=\dfrac{2t}{1+t^2};\ \cos 2x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2};\ \cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}\end{array}\right\|=$$

$$=\int \frac{4t+28}{7\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+41\cdot\dfrac{1}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{4t+28}{7\cdot 2t-\left(1-t^2\right)+41}dt=\int\frac{4t+28}{t^2+14t+40}dt=2\int\frac{2t+14}{t^2+14t+40}dt=$$

$$=\left\|(2t+14)dt=d\left(t^2+14t\right)=d\left(t^2+14t+40\right)\right\|=2\int\frac{d\left(t^2+14t+40\right)}{t^2+14t+40}=2\ln\left|t^2+14t+40\right|+C=\left\|t=\mathrm{tg}x\right\|=$$

$$=2\ln\left|\mathrm{tg}^2x+14\mathrm{tg}x+40\right|+C.$$