Решение контрольной работы по ТАУ

Задание 1. Исследовать устойчивость системы с характеристическим полиномом следующего вида:

$$A(p)=2p^3+14p^2+34p+30$$

Причем, один корень характеристического уравнения известен $p_1=-3$.

а) по корням характеристического уравнения (с использованием теорем Ляпунова);
б) по критерию Гурвица.

Решение:

а) Теорема Ляпунова утверждает, что для асимптотической устойчивости одномерной стационарной системы управления необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения имели отрицательные действительные части.

Характеристическое уравнение имеет вид: $A(p)=2p^3+14p^2+34p+30$.

Один из корней равен $p_1=-3$. Найдём остальные корни, разложив характеристическое уравнение на множители. Для этого разделим $A(p)$ на $p+3$.

$$\begin{array}{l|l} 2p^3+14p^2+34p+30 & \underline{p+3} \\ \underline{2p^3+6p^2} & 2p^2+8p+10 \\ \quad 8p^2+34p & \\ \quad \underline{8p^2+24p} & \\ \qquad 10p+30 & \\ \qquad \underline{10p+30} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Отсюда получается, что $2p^3+14p^2+34p+30=(p+3)(2p^2+8p+10)$.

Решим уравнение:

$$2p^2+8p+10=0;$$

$$p_{2;3}=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 10\cdot 2}}{2\cdot 2}=-2\pm i.$$

Так как все корни имеют отрицательные действительные части, то система асимптотически устойчива.

б) Критерий Гурвица (Рауса-Гурвица) утверждает, что для асимптотической устойчивости одномерной стационарной системы управления необходимо и достаточно, чтобы при $a_n>0$ угловые миноры Δ_i матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

были положительны.

Составим матрицу системы управления

$$\begin{pmatrix} 14 & 30 & 0 \\ 2 & 34 & 0 \\ 0 & 14 & 30 \end{pmatrix}.$$

Найдём угловые миноры:

$$\Delta_1 = 14 > 0;$$

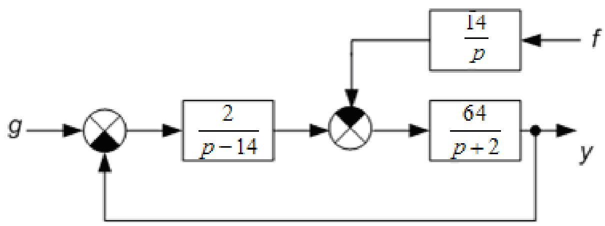
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 14 & 30 \\ 2 & 34 \end{vmatrix} = 416 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 14 & 30 & 0 \\ 2 & 34 & 0 \\ 0 & 14 & 30 \end{vmatrix} = 30 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 14 & 30 \\ 2 & 34 \end{vmatrix} = 12480 > 0.$$

Так как угловые миноры положительны, то система асимптотически устойчива.

Ответ: Система с характеристическим полиномом $A(p) = 2p^3 + 14p^2 + 34p + 30$ - устойчива.

Задание 2. Определить ошибку системы $\varepsilon_g(t)$ и $\varepsilon_f(t)$, заданной структурной схемой,

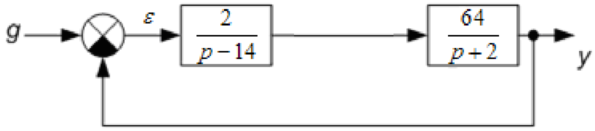


а) при негармоническом входном воздействии, вида: $g(t) = 2 + 14t + 34t^2$;

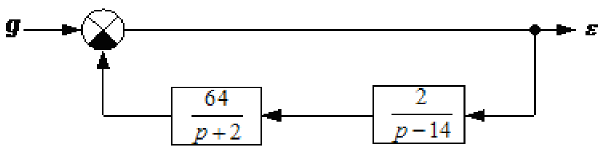
б) при гармоническом входном воздействии, вида: $f(t) = 2\sin(34t)$.

Решение:

А) Определим ошибку $\varepsilon_g(t)$. Для этого положим внешнее воздействие f равным нулю. Тогда система примет вид



Рассмотрим в качестве входного сигнала сигнал g, а в качестве выходного – сигнал ошибки ε. Тогда схема примет вид



Точность САУ в установившемся режиме, при относительно медленно изменяющихся воздействиях, может быть оценена с помощью коэффициентов ошибок.

Таким образом, для $\varepsilon_g(t)$ можно записать:

$$\varepsilon_g(t) = C_0 g(t) + C_1 \dot{g}(t) + C_2 \ddot{g}(t) + \ldots + C_i g^{(i)}(t) + \ldots$$

где C_i - коэффициенты ошибок, которые определяются по формуле:

$$C_i = \frac{1}{i!} \cdot \left.\frac{d^i W_\varepsilon(p)}{dp^i}\right|_{p=0},$$

где $W_\varepsilon(p)$ - передаточная функция системы по ошибке, которая находится по формуле:

$W_\varepsilon(p) = \dfrac{1}{W_1(p) \cdot W_2(p) + 1}$ или в нашем случае - $W_\varepsilon(p) = \dfrac{1}{\dfrac{2}{p-14} \cdot \dfrac{64}{p+2} + 1} = \dfrac{p^2 - 12p - 28}{p^2 - 12p + 100}$.

Найдем производные от входного сигнала по времени:

$$g(t) = 2 + 14t + 34t^2 \Rightarrow \dot{g}(t) = 14 + 68t \Rightarrow \ddot{g}(t) = 68.$$

Производные 3-го и высших порядков равны 0.

Найдем коэффициенты ошибок:

$$C_0 = W_\varepsilon(p)\big|_{p=0} = \frac{0 - 0 - 28}{0 - 0 + 100} = -\frac{7}{25};$$

$$C_1 = \left.\frac{dW_\varepsilon(p)}{dp}\right|_{p=0} = \left.\frac{(2p-12)(p^2 - 12p + 100) - (2p-12)(p^2 - 12p - 28)}{(p^2 - 12p + 100)^2}\right|_{p=0} = \left.\frac{256 \cdot (p-6)}{(p^2 - 12p + 100)^2}\right|_{p=0} =$$

$$= -\frac{96}{625};$$

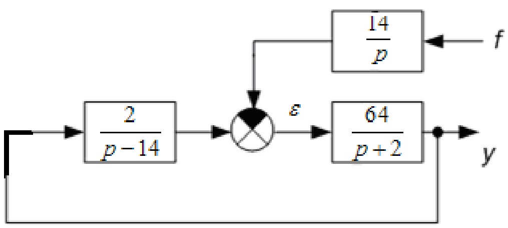
$$C_2 = \frac{1}{2} \cdot \left.\frac{d^2 W_\varepsilon(p)}{dp^2}\right|_{p=0} = -\left.\frac{256 \cdot (3p^2 - 36p + 44)}{(p^2 - 12p + 100)^3}\right|_{p=0} = -\frac{176}{15625}.$$

Тогда $\varepsilon_g(t)$, имеет вид:

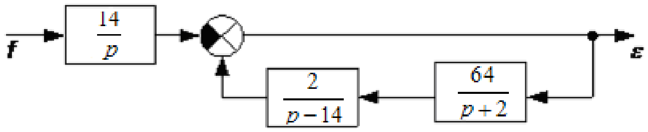
$$\varepsilon_g(t) = C_0 g(t) + C_1 \dot{g}(t) + C_2 \ddot{g}(t) = -\frac{7}{25} \cdot (2 + 14t + 34t^2) - \frac{96}{625} \cdot (14 + 68t) - \frac{176}{15625} \cdot 68 \approx$$

$$\approx -3{,}476 - 14{,}365t - 9{,}52t^2.$$

Б) Определим ошибку $\varepsilon_f(t)$. Для этого положим внешнее воздействие g равным нулю. Тогда система примет вид



Для определения передаточной функции по ошибке, преобразуем структурную схему к виду:



Тогда:

$$W_\varepsilon(p) = -W_3(p) + \frac{1}{W_1(p)\cdot W_2(p) - 1} = -\frac{14}{p} + \frac{1}{\frac{2}{p-14}\cdot\frac{64}{p+2} - 1} = -\frac{p^3 + 2p^2 - 196p - 2184}{p^3 - 12p^2 - 156p}.$$

Для $\varepsilon_f(t)$ при гармоническом воздействии можно записать:

$$\varepsilon_f(t) = \Delta_f(\omega_f)\cdot\sin(\omega_f t + \varphi(\omega_f)).$$

где $\Delta_f(\omega_f) = |W_\varepsilon(j\omega_f)|\cdot a$, причем $|W_\varepsilon(j\omega_f)|$ - модуль комплексного коэффициента передачи, a – амплитуда входного сигнала, $\varphi(\omega_f)$ - аргумент комплексного коэффициента передачи.

Найдем модуль комплексного коэффициента передачи, при учете $\omega_f = 34$:

$$|W_\varepsilon(j\omega_f)| = |-0,911 - 0,384i| = 0,977.$$

Тогда:

$$\Delta_f(\omega_f) = |W_\varepsilon(j\omega_f)|\cdot a \approx 0,977\cdot 2 \approx 1,955.$$

Найдем аргумент комплексного коэффициента передачи, при учете $\omega_f = 34$:

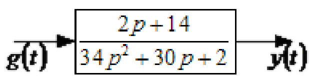
$$\phi(\omega_f) = Arg(-0,911 - 0,384i) \approx -2,839.$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\varepsilon_f(t) = \Delta_f(\omega_f)\cdot\sin(\omega_f t + \phi(\omega_f)) \approx 1,955\cdot\sin(4\cdot t - 2,839).$$

<u>Ответ:</u> $\varepsilon_g(t) \approx -3,476 - 14,365t - 9,52t^2.$; $\varepsilon_f(t) \approx 1,955\cdot\sin(4\cdot t - 2,839)$.

<u>Задача 3.</u> Определить реакцию системы $y(t)$ на заданный входной сигнал $g(t) = 5\cdot\sin(3t)$, заданной структурной схемой:



<u>Решение:</u>

Реакцию системы на входное воздействие заданного типа можно найти по следующей формуле: $y(t) = L^{-1}\{W(p)\cdot g(p)\}$.

где L^{-1} оператор обратного преобразования Лапласа.

Найдем изображение по Лапласу для заданного входного сигнала:

$$g(t) = 5\cdot\sin(3t) \Rightarrow g(p) = \frac{15}{p^2 + 9}.$$

Таким образом, реакция системы на заданное гармоническое воздействие имеет вид:

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{2p+14}{34p^2+30p+2}\cdot\frac{15}{p^2+9}\right\}.$$

Перейдем к общему знаменателю и разложим на элементарные дроби выражение в фигурных скобках, имеем:

$$\frac{2p+14}{34p^2+30p+2}\cdot\frac{15}{p^2+9}=\frac{15p+105}{\left(17p^2+15p+1\right)\left(p^2+9\right)}.$$

При разложении на дроби, получим:

$$\frac{15p+105}{\left(17p^2+15p+1\right)\left(p^2+9\right)}=\frac{Ap+B}{\left(17p^2+15p+1\right)}+\frac{Cp+D}{p^2+9}.$$

или

$$\frac{15p+105}{\left(17p^2+15p+1\right)\left(p^2+9\right)}=\frac{(Ap+B)\left(p^2+9\right)+(Cp+D)\left(17p^2+15p+1\right)}{\left(17p^2+15p+1\right)\left(p^2+9\right)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p, имеем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}A+17C=0\\B+15C+17D=0\\9A+C+15D=15\\9B+D=105\end{cases}.$$

Решая систему алгебраических уравнений, любым из известных методов (подстановки, Крамера, Гаусса, матричным), получаем:

$$A=2,61;\ B=11,73;\ C=-0,15,\ D=-0,55.$$

То есть, можно записать:

$$\frac{15p+105}{\left(17p^2+15p+1\right)\left(p^2+9\right)}=\frac{2,61p+11,73}{\left(17p^2+15p+1\right)}-\frac{0,15p+0,55}{p^2+9}.$$

Тогда реакцию системы на гармоническое воздействие будем определять, так:

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{2,61p}{17p^2+15p+1}+\frac{11,73}{17p^2+15p+1}-\frac{0,15p+0,55}{p^2+9}\right\}.$$

Выполнив, обратные преобразования Лапласа, получим:

$$\begin{gathered}y(t)=2,61\frac{\left(-15+\sqrt{157}\right)e^{\frac{-15+\sqrt{157}}{34}t}-\left(-15-\sqrt{157}\right)e^{\frac{-15-\sqrt{157}}{34}t}}{2\sqrt{157}}+\\+11,73\frac{e^{\frac{-15+\sqrt{157}}{34}t}-e^{\frac{-15-\sqrt{157}}{34}t}}{2\sqrt{157}}-0,15\cdot\cos(3\cdot t)-0,18\cdot\sin(3\cdot t)\end{gathered}.$$

Ответ:

$$y(t) = 2{,}61\frac{\left(-15+\sqrt{157}\right)e^{\frac{-15+\sqrt{157}}{34}t} - \left(-15-\sqrt{157}\right)e^{\frac{-15-\sqrt{157}}{34}t}}{2\sqrt{157}} +$$

$$+11{,}73\frac{e^{\frac{-15+\sqrt{157}}{34}t} - e^{\frac{-15-\sqrt{157}}{34}t}}{2\sqrt{157}} - 0{,}15\cdot\cos(3\cdot t) - 0{,}18\cdot\sin(3\cdot t)$$

Задача 4. Определить передаточную функцию системы $W(p)$ по известной переходной характеристике $h(t)$.

$$h(t) = 2 + 14t + \sin(34t) + 14e^{30t}$$

Решение: Для определения передаточной функции системы по известной переходной характеристике, удобнее всего воспользоваться следующей формулой:

$$W(p) = p\int_0^\infty h(t)e^{-pt}dt\,.$$

Тогда в соответствии с вариантом задания получим:

$$W(p) = p\int_0^\infty \left(2 + 14t + \sin(34t) + 14e^{30t}\right)e^{-pt}dt =$$

$$= 2p\int_0^\infty e^{-pt}dt + 14p\int_0^\infty te^{-pt}dt + p\int_0^\infty \sin(34t)e^{-pt}dt + 14p\int_0^\infty e^{30t}e^{-pt}dt.$$

Произведем интегрирование каждого из слагаемых по отдельности:

$$I_1 = 2p\int_0^\infty e^{-pt}dt = -2e^{-pt}\Big|_0^\infty = 2\,.$$

Для дальнейшего интегрирования нам необходимо вспомнить формулу интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu\,.$$

Тогда получим:

$$I_2 = 14p\int_0^\infty te^{-pt}dt = \left\{\begin{matrix} u = t & du = dt \\ e^{-pt}dt = dv & v = -\dfrac{1}{p}e^{-pt} \end{matrix}\right\} = -14te^{-pt}\Big|_0^\infty + 14\int_0^\infty e^{-pt}dt = \frac{14}{p}\,.$$

$$I_3 = p\int_0^\infty \sin(34t)e^{-pt}dt = \frac{34p}{p^2 + 34^2}\,.$$

$$I_4 = 14p\int_0^\infty e^{30t}e^{-pt}dt = \frac{14p}{p-30}\,.$$

Получаем:

$$W(p) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 2 + \frac{14}{p} + \frac{34p}{p^2+34^2} + \frac{14p}{p-30}\,.$$

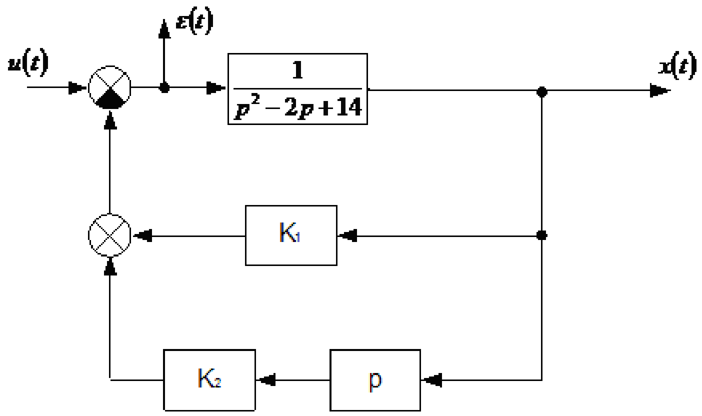
Приводим к общему знаменателю, имеем:

$$W(p) = \frac{16p^4 - 12p^3 + 17056p^2 - 53176p - 485520}{p^4 - 30p^3 + 1156p^2 - 34680p}\,.$$

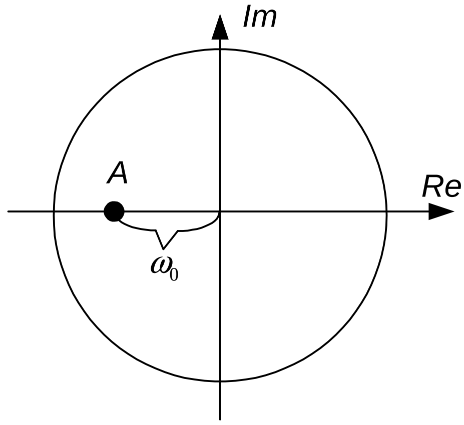
Ответ: $W(p)=\dfrac{16p^4-12p^3+17056p^2-53176p-485520}{p^4-30p^3+1156p^2-34680p}$.

Задача 5. Синтезировать систему управления, для объекта вида:
а) $\ddot{x}(t)-2\dot{x}(t)+14x(t)=u(t)$ - методом модального управления;
б) $\dfrac{2}{(34p+1)(30p+1)}$ - методом параметрического синтеза.

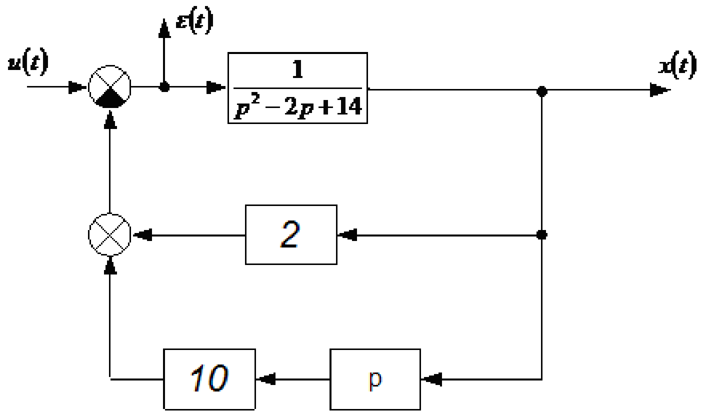
Решение:
а) Для заданного объекта управления построим систему, описываемую структурной схемой:



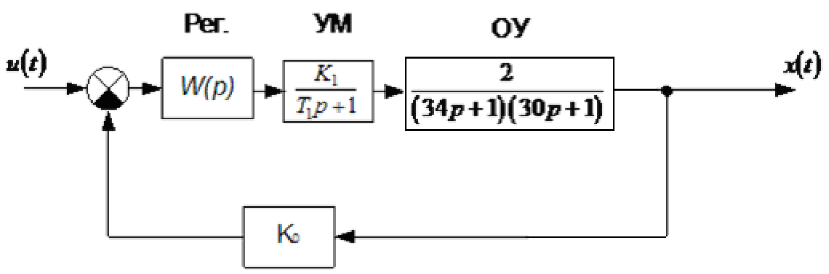
Для замкнутой системы, имеем:
$$\ddot{x}(t)-2\dot{x}(t)+14x(t)=u(t)-x(t)K_1-\dot{x}(t)K_2.$$
или
$$\ddot{x}(t)+(K_2-2)\dot{x}(t)+(14+K_1)x(t)=u(t).(1)$$
Далее необходимо задать желаемое ДУ замкнутой системы, например в виде:
$$\ddot{x}(t)+K_{2ж}\dot{x}(t)+K_{1ж}x(t)=u(t) \qquad (2)$$
Тогда с учетом (1) и (2) получим:
$$K_{2ж}=K_2-2,\ K_{1ж}=K_1+14.$$
или
$$K_2=K_{2ж}+2,\ K_1=K_{1ж}-14.$$
При выборе желаемой формы уравнения (2), необходимо, что бы корни замкнутой системы удовлетворяли биноминальной форме расположения корней.
Тогда характеристическое уравнение для (2) будет иметь вид:
$$(p-p_1)(p-p_2)=0,$$
Пусть $p_1=p_2=-\omega_0$, тогда $(p+\omega_0)^2=0$.
Но в соответствии с (2), получим:
$K_{2ж}=2\omega_o,\ K_{1ж}=\omega_0^2$.
Таким образом, мы обеспечим, попадание корней характеристического полинома для желаемого уравнения (2) в левую полуплоскость (вспомним 1-ю теорему Ляпунова).



Выбираем $\omega_0 = 4$, тогда $p_1 = p_2 = -4$, и отсюда получим: $K_{2ж} = 8,\ K_{1ж} = 16$.
Отсюда $K_2 = 8 + 2 = 10,\ K_1 = 16 - 14 = 2$.
Таким образом, наша система управления имеет вид:



Б) Возьмем неизменяемую структуру системы и к ней добавим заранее неизвестный регулятор.



где ОУ – объект управления; УМ – усилитель мощности (с самой малой постоянной времени T_1 во всей системе); Рег. – неизвестный регулятор.

Зададимся желаемой передаточной функцией разомкнутой системы, обычно она выбирается в виде:

$$W_{жр}(p) = \frac{1}{2T_1 p (T_1 p + 1)}. \qquad (1)$$

Передаточную функцию регулятора можно определить по формуле:

$$W_{рег}(p) \cdot \frac{K_1}{T_1 p + 1} \cdot \frac{2}{(34p+1)(30p+1)} \cdot K_0 = W_{жр}(p).$$

$$W_{рег}(p)=\frac{\dfrac{1}{2T_1p(T_1p+1)}}{\dfrac{K_1}{T_1p+1}\cdot\dfrac{2}{(34p+1)(30p+1)}\cdot K_0}=\frac{1020p^2+64p+1}{4pT_1K_1K_0}.$$

Получили передаточную функцию регулятора, теперь необходимо проверить, что она принадлежит классу реализуемых регуляторов (например, ПИД регуляторов). Для этого вспомним общую форму записи для ПИД регулятора, которая имеет вид:

$$W_{ПИД}(p)=k_{рег}\left(1+\frac{1}{T_иp}+T_дp\right).$$

То есть, необходимо поделить, числитель на знаменатель передаточной функции $W_{рег}(p)$:

$$W_{рег}(p)=\frac{255}{T_1K_1K_0}p+\frac{16}{T_1K_1K_0}+\frac{1}{4pT_1K_1K_0}=\frac{16}{T_1K_1K_0}\left(1+\frac{255}{16}p+\frac{1}{64p}\right).$$

Таким образом, имеем реализуемый ПИД регулятор.
Тогда задаем $T_1=0.1,\ K_1=10,\ K_0=1$, и получаем:

$$W_{рег}(p)=16+255p+\frac{1}{4p}.$$

Структурная схема системы будет выглядеть, так: