Расчетная работа ТАУ (вычисления в Matlab)

Показатели качества переходной характеристики

Дано: передаточная функция разомкнутой системы W(s), входное воздействие g(t)=1(t).
Задание: 1. Построить график выходной величины и определить прямые оценки качества;
2. Найти степень устойчивости η, колебательность μ, значение ξ, время переходного процесса t_η, затухание ζ;
3. Определить существует ли запас устойчивости;
4. Построить мажоранту и миноранту.

Вариант.

$W(s)=\dfrac{K(T_1s+1)}{s(T_2s^2+T_3s+25.7)}$, К=103; T_1=0.075с; T_2=0.1с; T_3=0.32с.

Решение

1. По теореме разложения найдем аналитическое выражение выходной величины y(t) и построим ее график. По графику определим прямые оценки качества и тип переходного процесса.
Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W(s)=\frac{K(T_1s+1)}{s(T_2s^2+T_3s+25.7)}=\frac{103(0.075s+1)}{s(0.1s^2+0.32s+25.7)}. \qquad (1)$$

Находим передаточную функцию замкнутой системы:

$$\Phi(s)=\frac{W(s)}{1+W(s)}=\frac{K(T_1s+1)}{s(T_2s^2+T_3s+25.7)+K(T_1s+1)}=$$
$$=\frac{KT_1s+K}{T_2s^3+T_3s^2+(25.7+KT_1)s+K}=\frac{7.725s+103}{0.1s^3+0.32s^2+33.425s+103}. \qquad (2)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$D(s)=0.1s^3+0.32s^2+33.425s+103 \qquad (3)$$

Его корни:

-0.057597 + 18.273j,
-0.057597 - 18.273j,
-3.0848 + 0j.

Пусть искомая функция y(t) имеет изображение:

$$Y(s)=\frac{B(s)}{D(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s^n+a_n}, \quad m\le n,$$

а характеристическое уравнение $D(s)$ не имеет нулевых и кратных корней. Тогда, согласно теореме разложения, оригинал y(t) может быть найден по формуле:

$$y(t) = \frac{B(0)}{D(0)} + \sum_{K=1}^{n} \frac{B(s_K)}{p_K D'(s_K)} e^{s_K t}, \tag{4}$$

где s_K – корни уравнения.

Преобразуем (2) к виду

$$\Phi(s) = \frac{7.725s + 103}{0.1s^3 + 0.32s^2 + 33.425s + 103} = \frac{77.25s + 1030}{s^3 + 3.2s^2 + 334.25s + 1030} \tag{5}$$

Находим:

$B(s) = 77.25s + 1030$, $B(0) = 1030$,

$D(s) = s^3 + 3.2s^2 + 334.25s + 1030$, $D(0) = 1030$,

$D'(s) = 3s^2 + 6.4s + 334.25$.

Согласно теореме разложения для системы (2)

$$y(t) = 1 + \sum_{K=1}^{n} \frac{77.25s_K + 1030}{s_K\left(3{s_K}^2 + 6.4s_K + 334.25\right)} e^{s_K \cdot t}. \tag{6}$$

Вычислим отдельно слагаемые, находящиеся в (6) под знаком суммы.

При s = –3.0848 получим:

$$\frac{B(s_1)}{s_1 D'(s_1)} e^{s_1 t} = \frac{791.67}{-3.085 \cdot 343.06} e^{-3.085t} = -0.75e^{-3.085t}. \tag{7}$$

При s = –0.057597 + 18.273j получим:

$$\begin{aligned} \frac{B(s_2)}{s_2 D'(s_2)} e^{s_2 t} &= \frac{1025.55 + 1411.57j}{(-0.06 + 18.3i)j \cdot (-667.783 + 110.63j)} e^{(-0.06 + 18.3j)t} = \\ &= -(0.13 - 0.064j)e^{(-0.06 + 18.3j)t} = 0.141 \cdot e^{j2.67} e^{(-0.06 + 18.3j)t} = \\ &= 0.141 \cdot e^{-0.06t} e^{j(2.67 + 18.3t)}. \end{aligned} \tag{8}$$

При s = –0.057597 – 18.273j получим:

$$\begin{aligned} \frac{B(s_3)}{s_3 D'(s_3)} e^{s_3 t} &= \frac{1025.55 - 1411.57j}{(-0.06 - 18.27j) \cdot (-667.783 - 110.63j)} e^{(-0.06 - 18.27j)t} = \\ &= -(0.13 + 0.064j)e^{(-0.06 - 18.3j)t} = 0.141 \cdot e^{-j2.67} e^{(-0.06 - 18.3j)t} = \\ &= 0.141 \cdot e^{-0.06t} e^{-j(2.67 + 18.3t)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Применяя к сумме сопряженных выражений (8), (9) формулу Эйлера:

$$\frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}=\cos\alpha, \tag{10}$$

получим:

$$\begin{aligned}&\frac{B(s_2)}{s_2D'(s_2)}e^{s_2t}+\frac{B(s_3)}{s_3D'(s_3)}e^{s_3t}=\\ &=0.141\cdot e^{-0.06t}e^{j(2.67+18.3t)}+0.141\cdot e^{-0.06t}e^{-j(2.67+18.3t)}=\\ &=0.282\cdot e^{-0.06t}\cos(18.3t+2.67).\end{aligned} \tag{11}$$

Окончательный вид выходной величины:

$$y(t)=\left[1-0.75e^{-3.085t}+0.282\cdot e^{-0.06t}\cos(18.27t+2.67)\right]\cdot 1(t). \tag{12}$$

Построим график выходной величины (12) (рис. 1). Начальный участок (12) (рис. 2).
По графикам (рис. 1-2) определим прямые оценки качества:

- время регулирования $t_p = 45.6$с ($\Delta = 2\%$),
- перерегулирование $\sigma=\frac{h_{\max}-h_{уст}}{h_{уст}}\cdot 100\%=\frac{1.25-1}{1}\cdot 100\%\approx 25\%$,
- частота колебаний T= 0.35, $\omega=\frac{2\pi}{T}\approx 17.95$ рад/с,

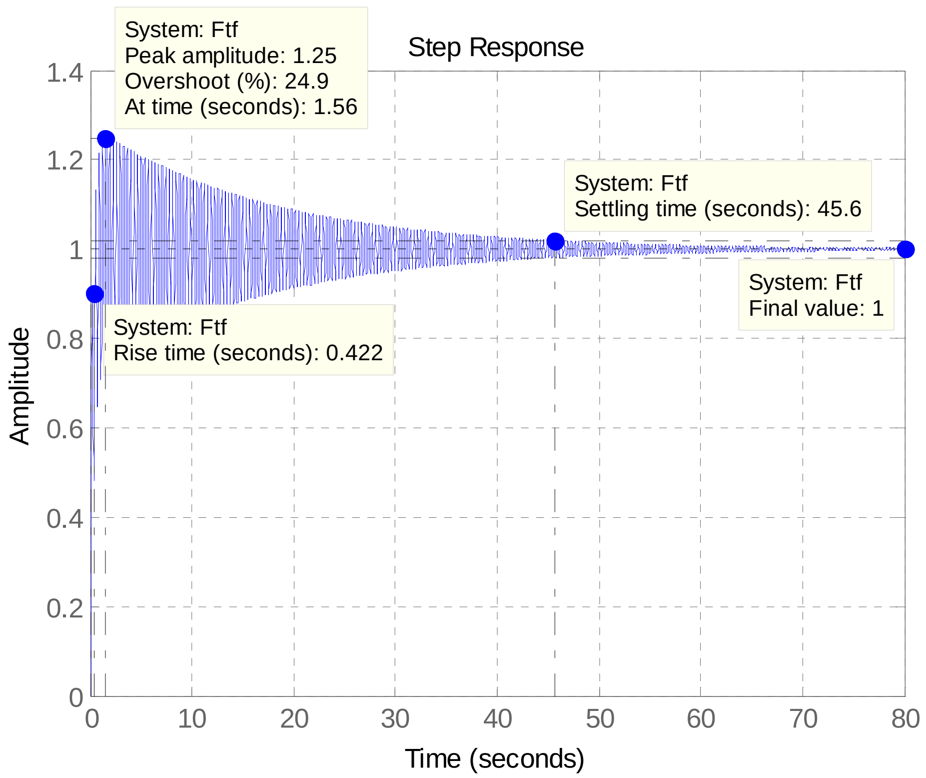


Рисунок 1 – График выходной величины

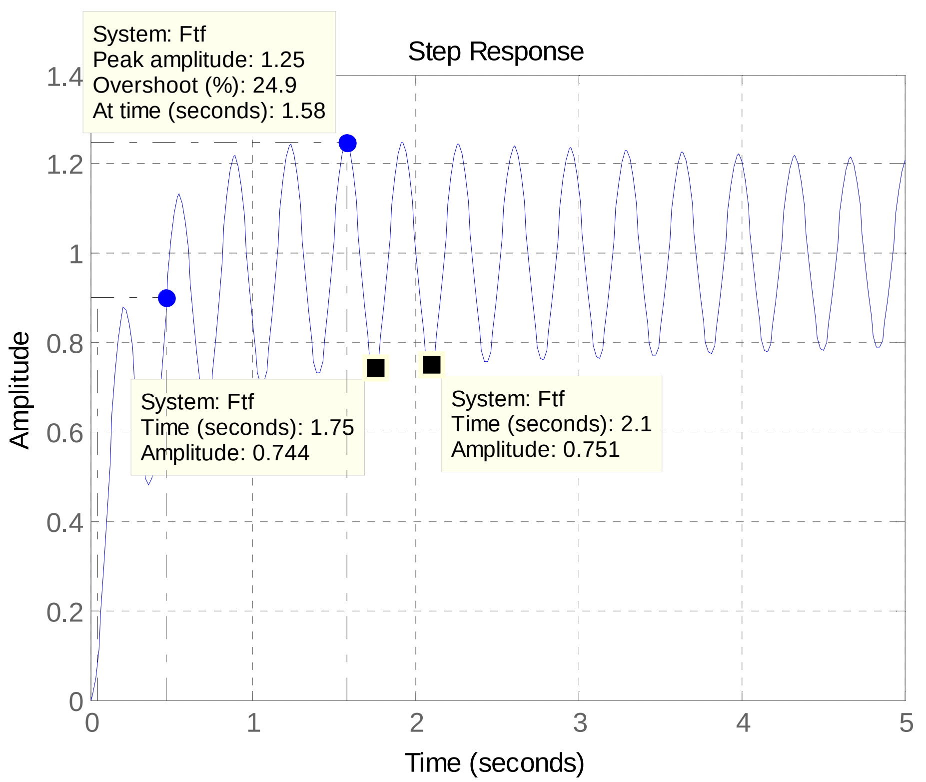


Рисунок 2 – График выходной величины

- число колебаний n = $\dfrac{t_p}{T}$ = 130,

- $t_{\max}$ = 1. 56 с,
- время нарастания переходного процесса $t_н$ = 0.422,
- декремент затухания $\chi = \dfrac{|h_{\max 1} - h_{уст}|}{|h_{\max 2} - h_{уст}|} = \dfrac{1.25-1}{1-0.744} = \dfrac{0.25}{0.256} \approx 0.977$.

В данном случае (рис. 1-2) имеем колебательный переходной процесс.

2. По корням характеристического уравнения системы построим область корней (трапецию) (рис. 3). По трапеции определим: степень устойчивости η, колебательность μ, значение ξ, время переходного процесса.

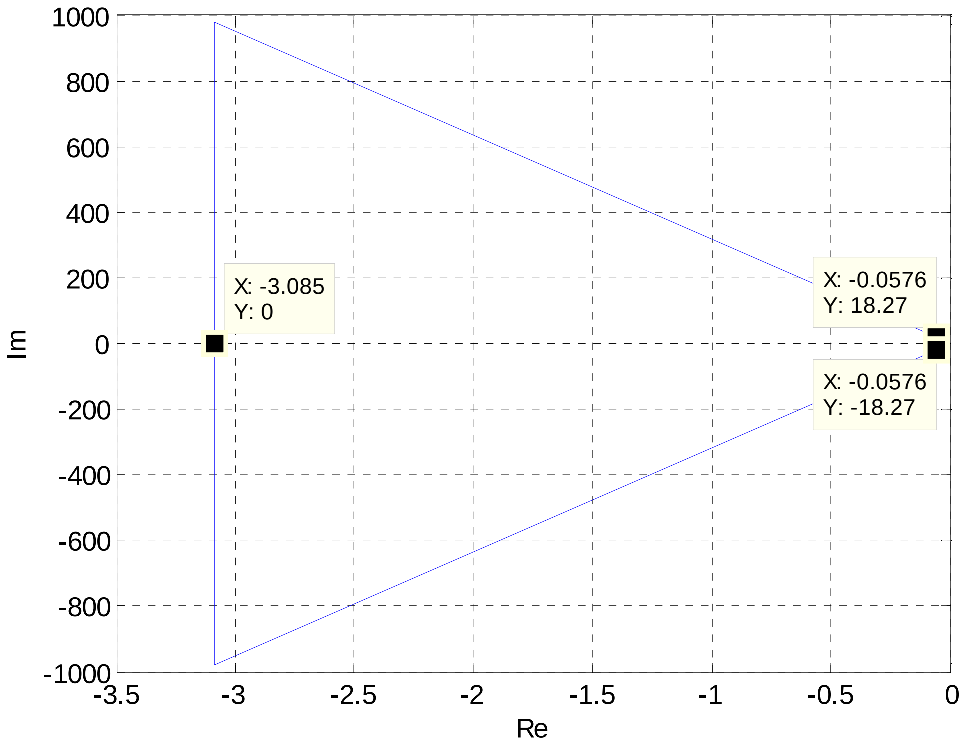


Рисунок 3 – Область корней

- степень устойчивости η=0.06,
- значение ξ=3.08,
- колебательность μ = 317.25,
- время переходного процесса $t_p \approx \dfrac{1}{\eta}\ln\dfrac{1}{\Delta} = \dfrac{1}{0.06}\ln\dfrac{1}{0.02}$ = 67.9 с.

3. Построим на одном графике кривые y(t), мажоранту и миноранту в относительном времени τ = ηt и определим затухание ζ (рис. 4):

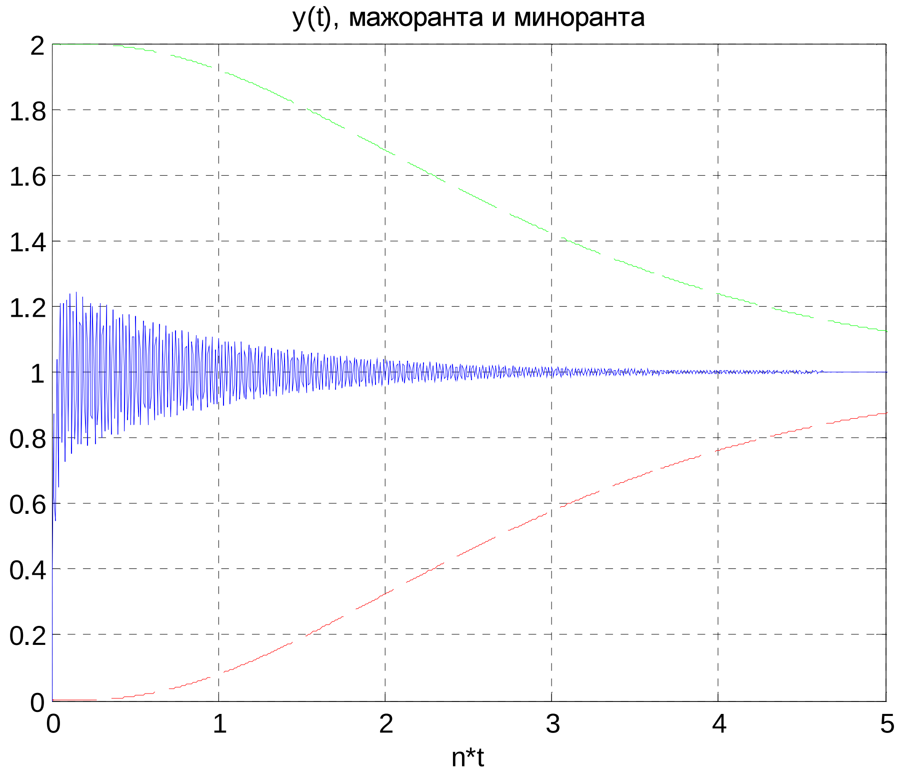


Рисунок 4 – Кривые y(t), мажоранта и миноранта

- мажоранта $v(t)=1+e^{-\eta\cdot t}\left(1+\eta\cdot t+\dfrac{\eta^2\cdot t^2}{2!}\right)$,
- миноранта $u(t)=1-e^{-\eta\cdot t}\left(1+\eta\cdot t+\dfrac{\eta^2\cdot t^2}{2!}\right)$,
- затухание $\zeta=1-e^{-\frac{2\pi}{\mu}}\approx 2\%$.

4. Найдем значение показателя колебательности M, радиуса R и величины C, построив график (рис. 5) и аналитически:

- показатель колебательности $M=|\Phi(j\omega)|_{\max}=44.73$,
- радиус $R=\dfrac{M}{M^2-1}=0.022$,
- величина $C=\dfrac{M^2}{M^2-1}=1$.

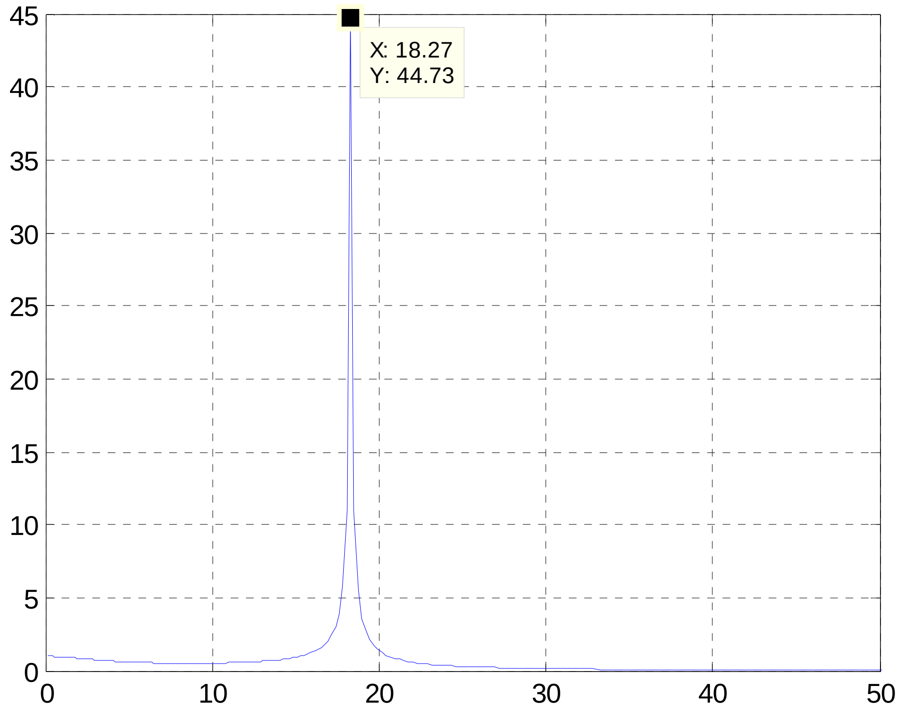


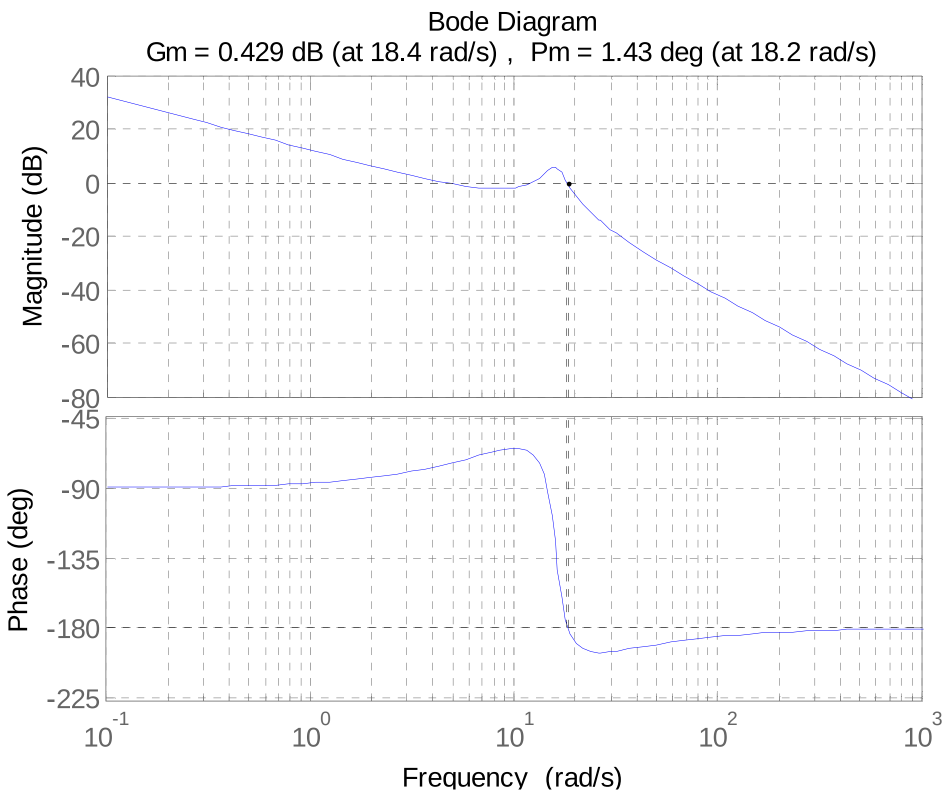
Рисунок 5 – Амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы

5. Определим, существует ли запас устойчивости, построив логарифмические амплитудно-частотные характеристики разомкнутой системы (рис. 6).
Частота среза $\omega_{ср} \approx 18{,}2$ 1рад/с, частота $\omega_{-\pi} \approx 18{,}4$ рад/с. Поскольку $\omega_{ср} < \omega_{-\pi}$ – система устойчива.
Определим запасы устойчивости системы.
Запас устойчивости по амплитуде (усилению) $L_{зап}$ определяется на частоте $\omega_{-\pi}$ и характеризует возможное увеличение коэффициента усиления разомкнутой САУ. Величина запаса устойчивости по амплитуде

$$L_{зап} = \left|L_p\left(\omega_{-\pi}\right)\right| \approx 0{,}429 \text{ дБ}.$$

Запас устойчивости по фазе $\varphi_{зап}$ определяется на частоте $\omega_{ср}$ и характеризует возможный дополнительный сдвиг фазы разомкнутой САУ. Величина запаса устойчивости по фазе

$$\varphi_{зап} = \pi + \varphi_p\left(\omega_{ср}\right) \approx 1{,}43°.$$



Выводы

В данной работе найдено аналитическое выражение выходной величины, построен ее график. По графику определены прямые оценки качества, установлено, что переходный процесс – колебательный.

По корням характеристического уравнения системы построена область корней, определены корневые показатели качества.

Построены кривые выходной величины, мажоранты и миноранты, определена величина затухания.

Найдены значения показателя колебательности, радиуса и величины смещения.

Определены запасы устойчивости.